$\boxed{\text{Correction de la feuille\_Exo\_16 : Diagonalisation.}}$

Ex 1 : *(non corrigé)*

Ex 2 : *(non corrigé)*

Ex 3 : *(non corrigé)*

Ex 4 : *(non corrigé)*

Ex 5 : *(non corrigé)*

Ex 6 : 1) *(Calcul faisable si on s'organise bien)*

Ce calcul n'était pas demandé.

$$(A+4I_4)^2 = \begin{pmatrix}1&1&-3&5\\1&1&5&-3\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-3&5\\1&1&5&-3\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

donc $(A+4I_4)^3 = 4\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&-3&5\\1&1&5&-3\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} = 16\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix}$

et enfin : $A(A+4I_4)^3 = 16\begin{pmatrix}-3&1&-3&5\\1&-3&5&-3\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

$$\boxed{A(A+4I_4)^3 = 0}$$

2) En notant $P(X) = X(X+4)^3$ on a $P(A) = 0$ et les racines de P sont 0 et -4,

donc *(en utilisant un résultat démontré en classe mais pas au programme)* le spectre de A est inclus dans $\{0, -4\}$.

Il reste à montrer que 0 *et* 4 *sont bien des valeurs propres de* A.

Pour $\lambda = 0$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A-0I_4) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}-3&1&-3&5\\1&-3&5&-3\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\1&-3&5&-3\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-3&5&-3\\1&1&-3&1\\1&1&1&-3\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}1&-3&5&-3\\0&4&-8&4\\0&4&-4&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix}\boxed{1}&-3&5&-3\\0&\boxed{4}&-8&4\\0&0&\boxed{4}&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\\
&= 3 \quad (\neq 4)
\end{aligned}$$

donc 0 est une valeur propre de A

Pour $\lambda = -4$.

$$\begin{aligned}
\operatorname{rg}(A+4I_4) &= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 1 & 1 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{rg}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= 2 \quad (\neq 4)
\end{aligned}$$

donc -4 est une valeur propre de A

En conclusion :

$$\boxed{\text{Le spectre de } A \text{ est } \{0,-4\}}$$

3) $\mathrm{S}p(A) = \{0,-4\}$ et les calculs de rang précédents montrent que : $\dim(E_0(A)) = 1$ et $\dim(E_{-4}(A)) = 2$ donc la somme des dimensions des sous-espaces propres de A est différente de 4
or $A \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

Ex 7 : 1) En posant $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ on a : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$

On peut alors montrer par récurrence sur n que

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix}}$$

2) a. *(fait au tableau par valentin ENV Nantes 2024)*

A a trois valeurs propres distinctes : 1, -1 et 2 et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable}}$$

b. A est diagonalisable et le spectre de A est $\{1,-1,2\}$ donc pour une matrice P inversible on a :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}$$

On montre alors par récurrence sur n que

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

Cela entraine :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$$

ou encore :

$$A^n = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + (-1)^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1} + 2^n P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

En posant : $R_1 = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$, $R_2 = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}P^{-1}$ et $R_3 = P\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}P^{-1}$

on a bien :

$$\boxed{\text{pour tout entier } n,\ A^n = R_1 + (-1)^n R_2 + 2^n R_3.}$$

c. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix}u_{n+2}\\u_{n+1}\\u_n\end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix} = R_1\begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix} + (-1)^n R_2\begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix} + 2^n R_3\begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix}$$

donc en posant α, β, γ le dernière composante respectivement de $R_1\begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix}$, $R_2\begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix}$ et $R_3\begin{pmatrix}u_2\\u_1\\u_0\end{pmatrix}$

on a bien :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \alpha + \beta(-1)^n + \gamma 2^n}$$

3) a. *(fait au tableau par Thimothé ENV Nantes 2025)*

A a deux valeurs propres distinctes : 1 et 2 et $\dim(E_1(A))+\dim(E_2(A)) = 2 \neq 3$ donc

$$\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable}}$$

b. On cherche x, y, z tels que :

$$\begin{pmatrix}4&-5&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&x\\2&1&y\\1&1&z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&1&x\\2&1&y\\1&1&z\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

cela donne le système

$$\begin{cases} 4x-5y+2z &= 1+x\\ x &= 1+y\\ \quad y &= 1+z\end{cases} \iff \cdots \iff \begin{cases} 4x-5y+2z &= 1+x\\ y-x &= 1\\ 0 &= 0\end{cases}$$

Prenons le vecteur $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$ et vérifions qu'il convient :

En posant : $P = \begin{pmatrix}4&1&2\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$, on a $\operatorname{rg}(P) = \cdots = 3$ donc P est inversible

et

$$\begin{pmatrix}4&-5&2\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4&1&2\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4&1&2\\2&1&1\\1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

donc on a $A = PBP^{-1}$ et ainsi

$$\boxed{A \text{ et } B \text{ sont semblables}}$$

Remarque sur le raisonnement : On a fait une analyse synthèse.

c. On note $D = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ de sorte que : $B = D + N$

$$DN = \begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad ND = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

on a donc $DN = ND$ et ainsi *(formule du binôme)* :

$$\begin{aligned}
B^n &= (N+D)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} \\
&= D^n + nND^{n-1} \qquad \text{car } N^2 = 0 \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n, \quad B^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Remarque : on aurait ici aussi faire une analyse synthèse : en observant les premières puissances de B il est assez facile de faire la conjecture que B^n est $\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ puis il reste à le démontrer par un raisonnement par récurrence.

d. *(non corrigé)*

Ex 8 : 1) On remarque qu'avec $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -2 \\ -4 & 3 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$ on a bien la relation : $X' = AX$.

Cherchons les valeurs propres de A :

$$\begin{aligned}
\text{rg}(A - \lambda I_3) &= \text{rg} \begin{pmatrix} 5-\lambda & -2 & -2 \\ -4 & 3-\lambda & 2 \\ 6 & -4 & -2-\lambda \end{pmatrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} -4 & 3-\lambda & 2 \\ 6 & -4 & -2-\lambda \\ 5-\lambda & -2 & -2 \end{pmatrix} \\
&= \text{rg} \begin{pmatrix} -4 & 3-\lambda & 2 \\ 0 & 2-6\lambda & 4-4\lambda \\ 0 & -4\lambda+8 & P(\lambda) \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} 6L_2 + 4L_1 \to L_2 \\ 6L_3 + (\lambda-5)L_1 \to L_3 \end{matrix}
\end{aligned}$$

avec : $P(\lambda) = -12 + (\lambda - 5)(-2-\lambda) = -\lambda^2 + 3\lambda - 2 = -(\lambda-1)(\lambda-2)$

le rang de $A - \lambda I_3$ est différent de 3 si, et seulement si,

$$(2-6\lambda)P(\lambda) - (-4\lambda+8)(4-4\lambda) = 0$$

or

$$\begin{aligned}
(2-6\lambda)P(\lambda) - (-4\lambda+8)(4-4\lambda) &= (2-6\lambda)(-(\lambda-1)(\lambda-2)) - (-4\lambda+8)(4-4\lambda) \\
&= (\lambda-1)((6\lambda-2)(\lambda-2) + 4(8-4\lambda)) \\
&= (\lambda-1)(\lambda-2)(6\lambda-2-16) \\
&= 6(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\text{le spectre de } A \text{ est } \{1, 2, 3\}}$

La matrice A appartient à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ et possède trois valeurs propres distinctes donc

$$\boxed{A \text{ est diagonalisable.}}$$

On montre que : *(A détailler)*

$$\left(\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\right) \text{ est une base de } E_1(A), \quad \left(\begin{pmatrix}2\\-2\\5\end{pmatrix}\right) \text{ de } E_2(A) \quad \text{et} \quad \left(\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}\right) \text{ de } E_3(A)$$

Donc *(en juxtaposant les bases on obtient une base formée de vecteurs propres)*

$$\boxed{\text{en posant : } P = \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -2 & -1\\2 & 5 & 2\end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 3\end{pmatrix} \text{ on a : } A = PDP^{-1}}$$

2) $Y(t) = P^{-1}X(t)$ donc les fonctions a, b et c sont des combinaisons linéaires des fonctions x, y et z qui sont dérivables donc

$$\boxed{\text{les fonctions } a,\ b \text{ et } c \text{ sont dérivables sur } \mathbb{R}}$$

On peut aussi remarquer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad Y'(t) = P^{-1}X'(t)$

En utilisant la relation $Y(t) = P^{-1}X(t)$ il vient : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad Y'(t) = DY(t)$

il vient : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a'(t) = a(t) \\ b'(t) = 2b(t) \\ c'(t) = 3c(t) \end{cases}$ et ainsi $\boxed{\exists (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} a(t) = k_1 e^t \\ b(t) = k_2 e^{2t} \\ c(t) = k_3 e^{3t} \end{cases}}$

3) • *(Analyse)* en conclusion des questions précédentes la relation $X(t) = PY(t)$ donne

$$\exists (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = k_1 e^t + 2k_2 e^{2t} + k_3 e^{3t} \\ y(t) = \quad -2k_2 e^{2t} - k_3 e^{3t} \\ z(t) = 2k_1 e^t + 5k_2 e^{2t} + 2k_3 e^{3t} \end{cases}$$

• *(Synthèse)* Réciproquement pour $(k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3$ si on pose $\begin{cases} x(t) = k_1 e^t + 2k_2 e^{2t} + k_3 e^{3t} \\ y(t) = \quad -2k_2 e^{2t} - k_3 e^{3t} \\ z(t) = 2k_1 e^t + 5k_2 e^{2t} + 2k_3 e^{3t} \end{cases}$

(c'est à dire $X = PY$),

on retrouve bien $X' = AX$ donc (x, y, z) est solution du système différentiel.

En conclusion :

$$\boxed{(x, y, z) \text{ une solution si, et seulement si, } \exists (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{R}^3 : \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = k_1 e^t + 2k_2 e^{2t} + k_3 e^{3t} \\ y(t) = \quad -2k_2 e^{2t} - k_3 e^{3t} \\ z(t) = 2k_1 e^t + 5k_2 e^{2t} + 2k_3 e^{3t} \end{cases}}$$

Remarque : On n'a jamais eu besoin de calculer les coefficients de P^{-1}

4) La condition initiale $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$ donne le système suivant :

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -2 & -1\\2 & 5 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & -2 & -1\\0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\k_2\\k_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$$

$$\iff (k_1, k_2, k_3) = (2, -1, 1)$$

La solution vérifiant $(x(0), y(0), z(0)) = (1, 1, 1)$ est définie par

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = 2e^t - 2e^{2t} + e^{3t} \\ y(t) = \quad 2e^{2t} - e^{3t} \\ z(t) = 4e^t - 5e^{2t} + 2e^{3t} \end{cases}}$$

Ex 9 : *(non corrigé)*