Feuille Cours_9 : Densités de probabilité, variables aléatoires à densité.

Par assimiler ces nouvelles notions, on s'appuiera le plus possible sur des représentations graphiques.

Ex 1 : Montrer que les fonctions suivantes sont des densités de probabilité. *trois points à vérifier :*

1) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-|2t+1|} \end{array}$

2) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{2\sqrt{t}}\, \mathbb{1}_{]0,1[}(t) \end{array}$

3) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & te^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \end{array}$.

4) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & 3(1-t)^2\, \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \end{array}$

5) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\pi(1+t^2)} \end{array}$

6) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (1-|t|)\, \mathbf{1}_{[-1,1]}(t) \end{array}$

Ex 2 : Illustrer graphiquement, et avec soin, les densités de la question précédente.

Ex 3 : Justifier que les fonctions suivantes ne sont pas des densités de probabilité :

On précisera laquelle des conditions de la définition d'une densité n'est pas vérifiée

1) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & e^{-t} \end{array}$

2) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\sin(t)}{\pi t} \end{array}$

3) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{\lfloor t \rfloor}{(\lfloor t \rfloor + 1)^3}\, \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t) \end{array}$

Ex 4 : Donner les trois densités usuelles vues dans le cours : "intégrales généralisées".

(uniforme, exponentielle et gaussienne)

Ex 5 :

1) Soit X une variable aléatoire de densité $f : t \longmapsto e^{-t}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$, que vaut $P(X \leqslant 1)$ et $P(X > 2)$?

2) Illustrer graphiquement les résultats précédents en faisant apparaitre les aires correspondantes sur la représentation de la densité.

Ex 6 : Les variables aléatoires suivantes sont-elles à densité ? *(on admettra qu'une telle variable aléatoire existe).* On donnera, lorsque c'est possible une densité associée.

1) X de fonction de répartition $F : x \longmapsto (1-e^{-x})\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
2) X de fonction de répartition $F : x \longmapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$.
3) X de fonction de répartition F définie par : $\begin{cases} \text{si} & x < 0 & \text{alors} & F(x) = 0 \\ \text{si} & 0 \leqslant x < 1 & \text{alors} & F(x) = \dfrac{x}{2} \\ \text{si} & x \geqslant 1 & \text{alors} & F(x) = 1 \end{cases}$
4) X de fonction de répartition F définie par : $\begin{cases} \text{si} & x < 0 & \text{alors} & F(x) = 0 \\ \text{si} & 0 \leqslant x < 2 & \text{alors} & F(x) = \dfrac{x}{2} \\ \text{si} & x \geqslant 2 & \text{alors} & F(x) = 1 \end{cases}$

Ex 7 : Sur l'annexe de cette feuille, on a tracé l'allure d'une densité de probabilité C_f.
Tracer sur le deuxième repère l'allure de la courbe de C_F où $F : x \longmapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$

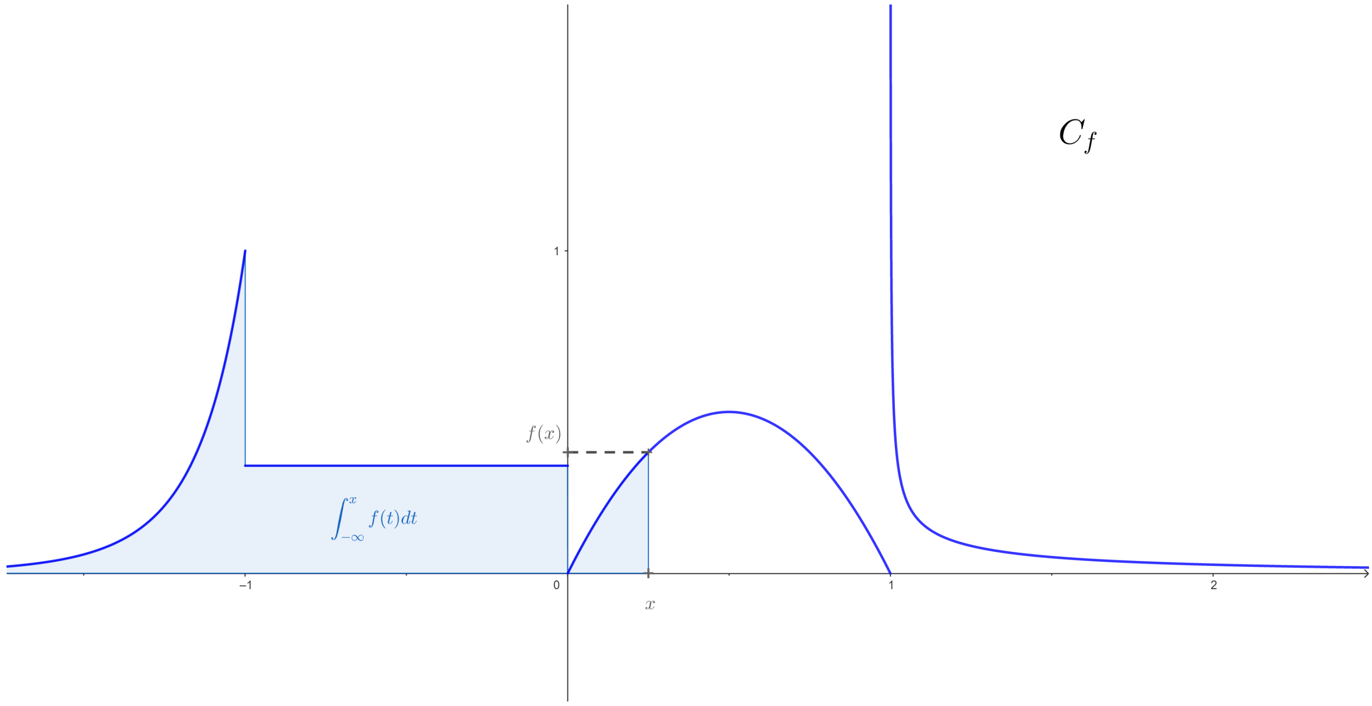
(Fonction de répartition associée à f)

Ex 8 :

1) Peut-on avoir des densités de probabilité discontinues ? si oui donner un exemple.
2) Peut-on avoir des densités de probabilité non bornées ? si oui donner un exemple.

Ex 9 : Reprendre **Ex 1** et déterminer la fonction de répartition d'une variable X de densité f.

$\boxed{\text{Annexe à la feuille\_cours\_9}}$



Donner l'allure de C_F correspondant à la densité représentée ci-dessus :