Feuille_calcul_5 : Calcul de rang.

Ex 1 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère la famille de vecteurs :

$$u_1 = (1, -1, 2), \quad u_2 = (2, 0, 1), \quad u_3 = (3, -1, 3), \quad u_4 = (1, 1, 0).$$

1) Déterminer la matrice de la famille (u_1, u_2, u_3, u_4) dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer le rang de cette famille.
3) La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Ex 2 : Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}_3[X]$ on considère la famille de vecteurs formée de :

$$P_1 = (X-1)^2 \quad ; \quad P_2 = (X+1)^2 \quad ; \quad P_3 = (X-1)^3 \quad ; \quad P_4 = (X+1)^3$$

1) Déterminer la matrice de (P_1, P_2, P_3, P_4) dans la base $(1, X, X^2, X^3)$.
2) En déduire le rang de (P_1, P_2, P_3, P_4).
3) (P_1, P_2, P_3, P_4) est-elle une base de $\mathbb{R}_3[X]$?

Ex 3 : On note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x, y, z) = (x + y - z,\ 2x - z,\ x + 3y).$$

1) Déterminer la matrice A de f dans la base canonique.
2) Calculer le rang de A.
3) En déduire $\ker(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$.

Ex 4 : On considère l'application linéaire $T : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ définie par

$$T(P) = P' + P.$$

1) Écrire la matrice de T dans la base $(1, X, X^2)$.
2) Déterminer le rang de T.
3) L'application T est-elle injective ? surjective ?

Ex 5 : On définit l'application linéaire $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y, z) = (x - 2y + z,\ 3x + y).$$

1) Donner la matrice de g dans les bases canoniques.
2) Déterminer le rang de g.
3) Donner une base du noyau $\ker(g)$.

Ex 6 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n.
On définit l'endomorphisme linéaire $T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ par

$$T(P) = P' + P,$$

où P' désigne la dérivée de P.

1) Justifier que T est bien une application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même.
2) Écrire la matrice de T dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
3) Déterminer le rang de T.
4) Montrer que cette matrice s'écrit comme somme d'une matrice nilpotente et d'une matrice diagonale.

Ex 7 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n, avec $n \geq 2$.
On définit l'application linéaire

$$T : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X], \qquad T(P) = P''.$$

1) Vérifier que T est bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2) Écrire la matrice de T dans la base canonique $(1, X, X^2, \ldots, X^n)$.
3) Montrer que cette matrice est nilpotente.
4) Déterminer le noyau $\ker(T)$.
5) Calculer le rang de T.
6) L'application T est-elle un isomorphisme ?

Ex 8 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on note $f_a : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire de matrice, dans la base canonique,

$$A_a = \begin{pmatrix} a & a & 1 \\ 0 & a+1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer le rang de f_a en fonction de a.
2) Pour quelles valeurs de a l'endomorphisme f_a est-il bijectif ?
3) Déterminer $\ker(f_a)$ pour les valeurs où f_a n'est pas bijectif *(s'il y en a).*

Ex 9 : Soient $E = \mathbb{R}^3$, $F = \mathbb{R}^2$, $G = \mathbb{R}^2$. On définit deux applications linéaires

$$f : E \to F, \qquad g : F \to G$$

par

$$f(x, y, z) = (x + y,\ y + z), \qquad g(u, v) = (u - v,\ 2u + v).$$

1) Déterminer les matrices de f et g dans les bases canoniques.
2) Calculer les rangs de f et de g.
3) Déterminer la matrice de la composée $h = g \circ f$.
4) Calculer le rang de h.
5) Vérifier que $\mathrm{rg}(h) \leq \min(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g))$.
6) (∗∗) Montrer que l'on peut généraliser ce résultat :
si E, F, G sont des espaces vectoriels de dimension finie, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont linéaires, alors
$$\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \min\big(\mathrm{rg}(f), \mathrm{rg}(g)\big).$$

Indications : • *on montrera que* $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(f)$ *et* $\mathrm{rg}(g \circ f) \leq \mathrm{rg}(g)$
• *on pourra commencer par montrer que* $ker(f) \subset ker(g \circ f)$