Feuille Calcul_6 : Valeurs propres et sous-espaces propres.

Ex 1. Soient $e_1, e_2, e_3, a, b, c, d \in \mathbb{R}^7$, on note $M = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$

Montrer que M est inversible si, et seulement si, $e_1 \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$

Ex 2. Soients A, B, C, D, E, F, G et H des réels et on note $M = \begin{pmatrix} A & B & 0 & 0 \\ C & D & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & F \\ 0 & 0 & G & H \end{pmatrix}$.

Montrer que :

$$M \text{ est inversible si, et seulement si, } (AD - BC)(EH - FG) \neq 0$$

Ex 3. 1) Soient n un entier naturel non nul et $(u_1, \ldots, u_n)$ une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. Montrer que : si $u_n \notin \operatorname{vect}(u_1, \ldots, u_{n-1})$ alors $\operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_n) = \operatorname{rg}(u_1, \ldots, u_{n-1}) + 1$.

2) Soient n un entier naturel non nul, $A \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

Montrer que $\operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(B) + 1$.

Ex 4. Soient a et λ deux réels, on note M la matrice $\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & a - \lambda & 0 \\ 0 & a - 2 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$.

❶ Déterminer le rang de M suivant les différentes valeurs de (a, λ).

❷ Pour quelles valeurs de (a, λ) la matrice M est inversible.

Ex 5. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

1) Écrire la matrice $A - \lambda I_4$.
2) Montrer qu'à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes (qui ne modifient pas le rang), on peut transformer $A - \lambda I_4$ en une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} \star & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & \star \\ 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix}.$$

3) En déduire que $A - \lambda I_4$ est inversible si, et seulement si, deux matrices 2×2 explicites sont inversibles.
4) Déterminer l'ensemble des valeurs propres de A.

Ex 6. On considère la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Écrire $B - \lambda I_4$.
2) Montrer qu'en effectuant des opérations élémentaires sur les lignes, on peut obtenir une matrice dont les deux premières lignes n'ont des coefficients non nuls que dans les deux premières colonnes, et dont les deux dernières lignes n'ont des coefficients non nuls que dans les deux dernières colonnes.
3) Conclure que l'inversibilité de $B - \lambda I_4$ se ramène à l'inversibilité de deux matrices 2×2.
4) Déterminer les valeurs propres de B.

Ex 7. On considère la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1) Écrire $C - \lambda I_4$.
2) Montrer qu'en permutant convenablement les lignes (ou les colonnes), on obtient une matrice bloc diagonale de deux blocs 2×2.
3) En déduire les valeurs propres de C (on explicitera les deux conditions d'inversibilité 2×2).

Ex 8. Soit $a \in \mathbb{R}$ et

$$D(a) = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Écrire $D(a) - \lambda I_4$.
2) Montrer qu'à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, on peut transformer $D(a) - \lambda I_4$ en une matrice bloc diagonale (deux blocs 2×2).
3) En déduire, selon a, les valeurs de λ pour lesquelles $D(a) - \lambda I_4$ n'est pas inversible (sans utiliser de déterminant 4×4).

Ex 9. Soit

$$E = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad F = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1) Montrer que pour tout $\lambda \neq 5$, on a

$$\mathrm{rg}(F - \lambda I_3) = \mathrm{rg}(E - \lambda I_2) + 1.$$

2) En déduire que les valeurs propres de F sont 5 et les valeurs propres de E.
3) Déterminer les valeurs propres de E (en se ramenant à une matrice 2×2).