Feuille Calcul_8 : Fonction de répartition - densité.

En pratique *(Justifier qu'une variable est à densité et déterminer une densité)*

Dans tous les exercices suivants on donne F_X la fonction de répartition d'une variable X.

Justifier que X est à densité et si c'est le cas donner une densité de probabilité de la variable aléatoire X.

Ex 1 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = \dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t \in]-1, 1] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ex 2 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = \dfrac{t+1}{3} & \text{si} \quad t \in]-1, 0] \\ F_X(t) = \dfrac{1}{2} - (1-t)^2 & \text{si} \quad t \in]\,0\,,\,1\,] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ex 3 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = \dfrac{t^2}{2} + t + \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t \in]-1, 0] \\ F_X(t) = t - \dfrac{t^2}{2} + \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t \in]\,0\,,\,1\,] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ex 4 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = t+1 & \text{si} \quad t \in]-1, -\dfrac{1}{2}] \\ F_X(t) = \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t \in]-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}] \\ F_X(t) = t & \text{si} \quad t \in]\,\dfrac{1}{2}\,,\,1\,] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ex 5 : $\begin{cases} F_X(t) = e^t & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]0; +\infty[\end{cases}$

Ex 6 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = 1 - \exp\big(-2\lfloor t \rfloor - 2\big) & \text{si} \quad t \in]0; +\infty[\end{cases}$

Ex 7 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = t & \text{si} \quad t \in]0, \dfrac{1}{2}[\\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in [\dfrac{1}{2}; +\infty[\end{cases}$

Ex 8 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = \dfrac{t^2}{3} & \text{si} \quad t \in]0, \sqrt{3}[\\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in [\sqrt{3}; +\infty[\end{cases}$

Ex 9 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 1] \\ F_X(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{2} - \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t \in]1, 9] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]9; +\infty[\end{cases}$

Ex 10 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = \dfrac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} & \text{si} \quad t \in]-1, 0] \\ F_X(t) = t - \dfrac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \dfrac{2}{3} & \text{si} \quad t \in]0, 1] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ex 11 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = 1 - e^{-\frac{t^2}{2}} & \text{si} \quad t \in]0; +\infty[\end{cases}$

Ex 12 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = \sqrt{t} & \text{si} \quad t \in]0, 1] \\ F_X(t) = 1 & \text{si} \quad t \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ex 13 : Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty\,,\ \theta\ [\\ F_X(t) = 1 - e^{\theta - t} & \text{si} \quad t \in]\ \theta\ , +\infty[\end{cases}$$

Ex 14 : $\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si} \quad t \in]-\infty, 0] \\ F_X(t) = e^{-\frac{1}{t}} & \text{si} \quad t \in]0; +\infty[\end{cases}$

Ex 15 : $\begin{cases} F_X(t) = -\dfrac{1}{2t} & \text{si} \quad t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = \dfrac{1}{2} & \text{si} \quad t \in]-1, 1] \\ F_X(t) = 1 - \dfrac{1}{2t} & \text{si} \quad t \in]1; +\infty[\end{cases}$

Ex 16 : Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et X une variable aléatoire de fonction de répartition :

$$x \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } a \leqslant x \leqslant b \\ 1 & \text{si } b < x \end{cases}$$

Justifier que X est à densité et déterminer une densité de X.

Ex 17 : Soit λ un réel strictement positif et X une variable aléatoire de fonction de répartition :

$$F_X : t \longmapsto (1 - e^{-\lambda t})\, \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t)$$

Justifier que X est à densité et déterminer une densité de X.