Feuille Exo_17 : Variables aléatoires à densité.

Définition : $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$ ou $X \hookrightarrow \mathscr{U}(]a,b[)$

Soient X une variable aléatoire, a et b deux réels vérifiant $a < b$,
Dire que X suit une loi uniforme sur $[a,b]$ ou ($]a,b[$) signifie que :

$$X \text{ est de densité } f : t \longmapsto \frac{1}{b-a}\mathbb{1}_{[a,b]}(t)$$

Proposition.

X suit la loi $\mathscr{U}([a,b])$ si, et seulement si, sa fonction de répartition est

$$F \text{ définie par : si } x > a,\ F(x) = 0,\ \text{ si } x \in [a,b],\ F(x) = \frac{x-a}{b-a} \text{ et sinon } F(x) = 1.$$

Définition : $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$

Soit λ un réel strictement positif, ($\lambda \in \mathbb{R}_+^*$)
Dire que X suit une loi exponentielle de paramètre λ signifie que :

$$X \text{ est de densité } f : t \longmapsto \lambda e^{-\lambda t}.\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(t)$$

Proposition.

X suit la loi $\mathscr{E}(\lambda)$ si, et seulement si, sa fonction de répartition est : $F : x \longmapsto (1 - e^{-\lambda x}).\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)$

Ex 1 : Illustrer graphiquement les définitions et propositions précédentes.

Ex 2 : Démontrer les deux propositions ci-dessus.

Ex 3 : Soient n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[\![1;n]\!]$.

1) Rappeler la loi de X et préciser sa fonction de répartition.
2) Pourquoi X n'est pas une variable à densité ?

Ex 4 : Soit $a \in \mathbb{R}$, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{a}{x\sqrt{x}}$ si $x \geqslant 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

1) Déterminer le réel a pour que f soit une densité de probabilité d'une certaine variable aléatoire X.
2) Déterminer la fonction de répartition F de X.
3) Donner l'allure des représentations des fonctions f et F dans deux repères différents.

Ex 5 : 1) Montrer que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1;1]}(t)$ est une densité de probabilité.

On considère X une variable aléatoire de densité f.

2) Préciser la fonction de répartition de X.
3) On définit $Y = X^2$,
   ❶ Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
   ❷ Donner l'allure de la courbe de F_Y.
   ❸ Justifier que la variable aléatoire Y est à densité.
   ❹ Déterminer une densité de Y.

Ex 6 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-1,2]$,
On note $Y = \sqrt{X+1}$. *(on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)*

1) Déterminer la fonction de répartition de Y.
2) Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.

Ex 7 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1,

On note $Y = \dfrac{1}{X}$. *(on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)*

1) Déterminer la fonction de répartition de Y.
2) Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.

Ex 8 : Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$,

1) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire : $Y = -\dfrac{1}{a}\ln(1 - X)$?
2) Reconnaître la loi de Y.

Ex 9 : *(Oral Agro 2021)*

Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f telle que :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} & \text{si } x > 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) Vérifier que f est une densité de probabilité.
2) Déterminer la fonction de répartition de X.
3) Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0, 1[$.
   Montrer que la variable aléatoire $V = \dfrac{1}{\sqrt{1 - U}}$ suit la même loi que X.
4) Écrire un programme Python simulant une réalisation de la variable aléatoire X.
5) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ? une variance ?
   Si oui, les calculer, et vérifier vos réponses à l'aide du programme de la question 4).

Ex 10 : *(MCR 2024)*

Soit λ un réel strictement positif.

On définit la fonction f par :

$$f : x \mapsto \lambda \exp(-x) \exp[-\lambda \exp(-x)]$$

1) Justifier que la fonction f est bien une densité de probabilité.
   On appellera cette loi *la loi de Gumbel de paramètre* λ.
2) Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ,
   montrer que la variable aléatoire $Y = -\ln(X)$ suit la loi Gumbel.