

Ex 1 : (*Démonstration de cours*)Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F .1) Soit a un réel quelconque.Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(X = a) \leq F(a) - F(a - \varepsilon)$.2) En déduire : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$ 3) Soit D un ensemble fini ou dénombrable. Que vaut $P(X \in D)$?**Ex 2 :** Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition : F définie par :

$$\text{si } x < 1, F(x) = 0, \quad \text{si } x \in [1, 9], F(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \quad \text{et} \quad \text{si } x > 9, F(x) = 1$$

Calculer les probabilités suivantes : 1) $P(X \in [2, 4])$ 2) $P(X \geq 4)$ 3) $P(X \leq 2)$ **Ex 3 :** Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto 2e^{-2t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.Calculer les probabilités suivantes : 1) $P(X \in [1, 2])$ 2) $P(X \geq 3)$ 3) $P(-1 \leq X \leq 1)$ **Ex 4 :** Soit X de densité $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$, X est à valeurs dans $[0, 1]$ Vrai ☐ Faux ☐ X est à valeurs dans $]0, 1[$ Vrai ☐ Faux ☐ X est à valeurs dans $[0, 2]$ Vrai ☐ Faux ☐ X est à valeurs dans $[0, 1; 1]$ Vrai ☐ Faux ☐**Ex 5 :** Compléter en donnant l'ensemble où une densité de X est non nul.1) En prenant X de densité $f : t \mapsto t \mathbb{1}_{[0,2]}(t)$, X est à valeurs dans

$$2) \text{ En prenant } X \text{ à densité ayant pour fonction de répartition } \left\{ \begin{array}{ll} F_X(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = t + 1 & \text{si } t \in]-1, -\frac{1}{2}] \\ F_X(t) = \frac{1}{2} & \text{si } t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ F_X(t) = t & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{array} \right. ,$$

 X est à valeurs dans

3) Quelles sont les valeurs prises pour les variables aléatoires suivants les lois à densité usuelles?

Ex 6 : 1) (*) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.On note $Y = (X + 1)^2$.a. Donner la fonction de répartition de X .b. Déterminer la fonction de répartition de Y .c. Y est-elle une variable aléatoire à densité? et si oui, en donner une.2) (**) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.On note $Y = X^2$,a. Donner la fonction de répartition de X .b. Déterminer la fonction de répartition de Y .c. Y est-elle une variable aléatoire à densité? et si oui, en donner une.3) (***) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1}_{[-1,2]}(t)$.On note $Y = |X|$,a. Donner la fonction de répartition de X .b. Déterminer la fonction de répartition de Y .c. Y est-elle une variable aléatoire à densité? et si oui, en donner une.