

Feuille Cours_9_2 : Variables aléatoires à densité et probabilités.

Ex 1 : (*Démonstration de cours*)

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F .

1) Soit a un réel quelconque.

Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $P(X = a) \leq F(a) - F(a - \varepsilon)$.

2) En déduire : pour tout $a \in \mathbb{R}$, $P(X = a) = 0$

3) Soit D un ensemble fini ou dénombrable. Que vaut $P(X \in D)$?

Ex 2 : Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition : F définie par :

$$\text{si } x < 1, \quad F(x) = 0, \quad \text{si } x \in [1, 9], \quad F(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \quad \text{et} \quad \text{si } x > 9, \quad F(x) = 1$$

Calculer les probabilités suivantes : 1) $P(X \in [2, 4])$ 2) $P(X \geq 4)$ 3) $P(X \leq 2)$

Ex 3 : Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto 2e^{-2t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$.

Calculer les probabilités suivantes : 1) $P(X \in [1, 2])$ 2) $P(X \geq 3)$ 3) $P(-1 \leq X \leq 1)$

Ex 4 : Soit X de densité $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$,

X est à valeurs dans $[0, 1]$ Vrai Faux X est à valeurs dans $]0, 1[$ Vrai Faux

X est à valeurs dans $[0, 2]$ Vrai Faux X est à valeurs dans $[0, 1; 1]$ Vrai Faux

Ex 5 : Compléter en donnant l'ensemble où une densité de X est non nul.

1) En prenant X de densité $f : t \mapsto t \mathbb{1}_{[0,2]}(t)$, X est à valeurs dans

2) En prenant X à densité ayant pour fonction de répartition

$$\left\{ \begin{array}{ll} F_X(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, -1] \\ F_X(t) = t + 1 & \text{si } t \in]-1, -\frac{1}{2}] \\ F_X(t) = \frac{1}{2} & \text{si } t \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \\ F_X(t) = t & \text{si } t \in]\frac{1}{2}, 1] \\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in]1; +\infty[\end{array} \right. ,$$

X est à valeurs dans

3) Quelles sont les valeurs prises pour les variables aléatoires suivants les lois à densité usuelles ?

Ex 6 : 1) (*) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.

On note $Y = (X + 1)^2$.

a. Donner la fonction de répartition de X .

b. Déterminer la fonction de répartition de Y .

c. Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.

2) (**) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.

On note $Y = X^2$,

a. Donner la fonction de répartition de X .

b. Déterminer la fonction de répartition de Y .

c. Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.

3) (***) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1}_{[-1,2]}(t)$.

On note $Y = |X|$,

a. Donner la fonction de répartition de X .

b. Déterminer la fonction de répartition de Y .

c. Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.