

Correction de la feuille Cours_9 : Densités de probabilité, variables aléatoires à densité.

Ex 1 : 1) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $t \longmapsto e^{-|2t+1|}$

- $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$
- f est continue sur $\mathbb{R}$ (*composée de fonctions continues*)
- En faisant le changement affine $x = 2t + 1$, on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx \quad (\text{sous réserve de convergence})$$

de plus $t \longmapsto e^{-|t|}$ est paire donc il suffit d'étudier $\int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{2} e^{-x} dx$

or on sait que $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx$ converge et vaut 1, donc $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|2t+1|} dt$ converge et vaut $2 \times \frac{1}{2} = 1$

En conclusion :

f est une densité de probabilité

2) si $t \in]0, 1[$, $f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$ et sinon $f(t) = 0$,

- $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) \geq 0$
- f est continue sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 et en 1.
- Comme f est nulle en dehors de $]0, 1[$ on a : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt$ (*sous réserve de convergence*)

or pour $x \in]0, 1[$, $\int_x^1 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \left[\sqrt{t} \right]_x^1 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1

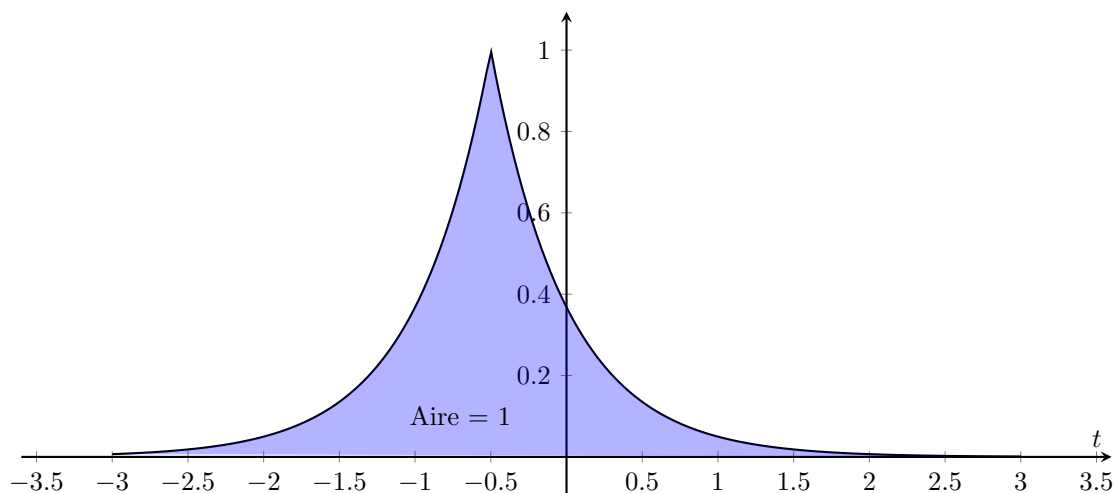
En conclusion :

f est une densité de probabilité

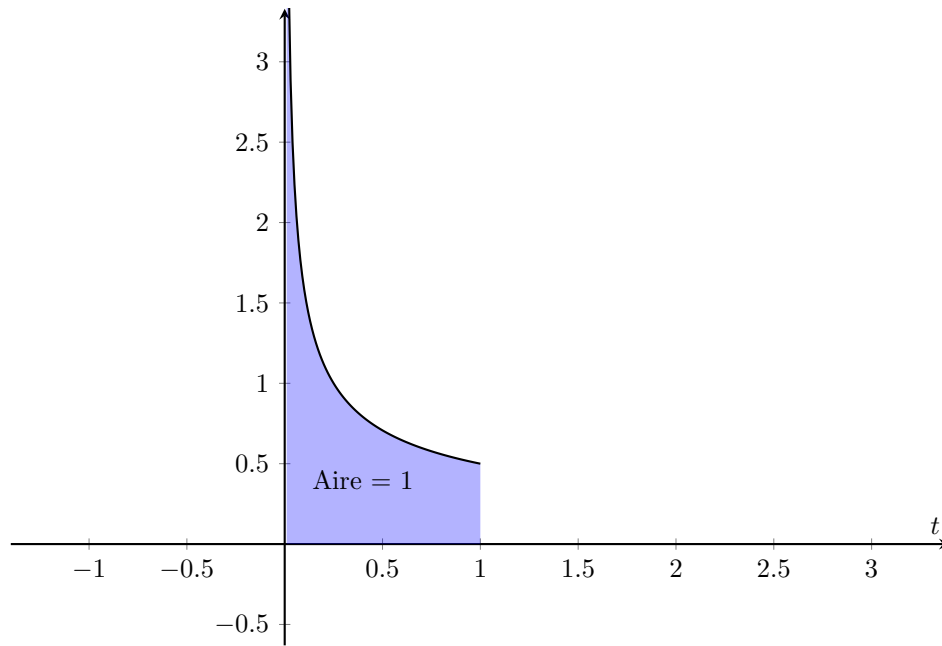
- 3) (*non corrigé*)
- 4) (*non corrigé*)
- 5) (*non corrigé*)
- 6) (*non corrigé*)

Ex 2 :

$$f(t) = e^{-|2t+1|}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$



$$f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbb{1}_{]0,1[}(t), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$$



- Ex 3 :**
- 1) f n'est pas une densité de probabilité car $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ diverge.
 - 2) f n'est pas une densité de probabilité car f prend des valeurs strictement négatives.
 - 3) f n'est pas une densité de probabilité car f est discontinue en un nombre infini de points.

Ex 4 : • Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, la densité de la loi uniforme sur $[a, b]$:

$$f : t \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(t)$$

- Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, la densité de la loi exponentielle :

$$f : t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$$

- La densité de la loi normale centrée réduite :

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$

- Pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$, la densité de la loi normale de paramètre (μ, σ^2) :

$$f : t \mapsto \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Ex 5 : *(non corrigé)*

Ex 6 : *(non corrigé)*

Ex 7 : *(non corrigé)*

Ex 8 : *(non corrigé)*

Ex 9 : *(non corrigé)*

