

Correction de la feuille Cours_9_2 : Variables aléatoires à densité et probabilités.

Ex 1 : 1) Pour $\varepsilon > 0$, on a : $(X = a) \subset (a - \varepsilon < X \leq a)$ et $P(a - \varepsilon < X \leq a) = F(a) - F(a - \varepsilon)$
donc

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \quad 0 \leq P(X = a) \leq F(a) - F(a - \varepsilon)}$$

2) X est une variable aléatoire à densité donc F est continue en a et ainsi $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(a - \varepsilon) = F(a)$
en faisant tendre ε vers 0 sur l'encadrement $0 \leq P(X = a) \leq F(a) - F(a - \varepsilon)$ on obtient bien :

$$\boxed{\forall a \in \mathbb{R}, \quad P(X = a) = 0}$$

3) • On note $D = \{d_i \mid i \in \llbracket 1; n \rrbracket\}$ (avec $i \neq j \Rightarrow d_i \neq d_j$)

$$\begin{aligned} P(X \in D) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (X = d_i)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n P(X = d_i) \quad \text{car les } (X = d_i) \text{ sont deux à deux incompatibles} \\ &= \sum_{i=1}^n 0 \quad \text{d'après 1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } D \text{ un ensemble fini et } X \text{ est à densité alors } P(X \in D) = 0}$$

• On note $D = \{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (avec $i \neq j \Rightarrow d_i \neq d_j$)

$$\begin{aligned} P(X \in D) &= P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (X = d_n)\right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = d_n) \quad \text{car les } (X = d_n) \text{ sont deux à deux incompatibles} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} 0 \quad \text{d'après 1)} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } D \text{ un ensemble dénombrable et } X \text{ est à densité alors } P(X \in D) = 0}$$

Ex 2 : 1) $P(X \in [2, 4]) = F(4) - F(2) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}-1}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$
2) $P(X \geq 4) = 1 - F(4) = \frac{1}{2}$ Remarque : 4 est la médiane de cette loi. $P(X \geq 4) = P(X \leq 4) = \frac{1}{2}$.
3) $P(X \geq 2) = F(2) = \frac{\sqrt{2}-1}{2}$

Ex 3 : 1) $P(X \in [1, 2]) = \int_1^2 f(t) dt = \int_1^2 2e^{-2t} dt = e^{-2} - e^{-4}$.
2) $P(X \geq 3) = \int_3^{+\infty} f(t) dt = 1 - \int_0^3 2e^{-2t} dt = 1 - (1 - e^{-6}) = e^{-6}$.
3) $P(X \in [-1, 1]) = \int_{-1}^1 f(t) dt = \int_0^1 2e^{-2t} dt = 1 - e^{-2}$.

Remarque : ici la fonction de répartition est $Fx \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)(1 - e^{-2t})$

1) $P(X \in [1, 2]) = F(2) - F(1) = (1 - e^{-4}) - (1 - e^{-2}) = e^{-2} - e^{-4}$
2) $P(X \geq 3) = 1 - F(3) = e^{-6}$
3) $P(X \in [-1, 1]) = F(1) - F(-1) = (1 - e^{-2}) - 0 = 1 - e^{-2}$

Ex 4 : Soit X de densité $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$,

Avec la définition précédente : *(ça n'a pas d'autres intérêts que de comprendre cette définition)*

X est à valeurs dans $[0, 1]$ Vrai ☒ Faux ☐ X est à valeurs dans $]0, 1[$ Vrai ☒ Faux ☐

X est à valeurs dans $[0, 2]$ Vrai ☒ Faux ☐ X est à valeurs dans $[0, 1; 1]$ Vrai ☐ Faux ☒