

Feuille Cours_9_3 : Variables aléatoires à densité.

Ex 1 : Donner dans les cas suivants un intervalle I tel que X est à valeurs dans I .

(ici plusieurs réponses possibles, on tentera de prendre le plus petit I de la forme $]a, b[,]a, +\infty[$ et $]-\infty, a[$)

- 1) X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto 2e^{-2t} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.
- 2) X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$.

(Il faut étendre cette définition en remplaçant l'intervalle I par une réunion d'intervalles).

- 3) Reprendre tous les exemples de la feuille calcul 7 et déterminer le plus petit ensemble D tel que X est à valeurs dans D .

Ex 2 : 1) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto 2e^{-2t} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

- a) On note $Y = X^2 - X$,
Déterminer le plus grand réel a tel que Y est à valeurs dans $[a; +\infty[$.
- b) On note $Y = X - \lfloor X \rfloor$,
Que peut-on dire de $F_Y(x)$ pour $x \leq 0$, puis pour $x \geq 1$?

- 2) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$.

- a) On note $Y = X^2$,
Déterminer le plus grand réel a tel que Y est à valeurs dans $[a; +\infty[$.
- b) On note $Y = \lfloor X \rfloor$,
 Y est-elle une variable aléatoire à densité ?

Ex 3 : Déterminer l'image directe de A par u dans les différents cas suivant :

- 1) En prenant $u : t \mapsto t^2 - 3$ et $A = [1, 3]$, $u(A) = \dots\dots\dots$.
- 2) En prenant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $A = [-1; 1] \setminus \{0\}$, $u(A) = \dots\dots\dots$.
- 3) En prenant $u : t \mapsto t^2 + 1$ et $A = [-1, 2]$, $u(A) = \dots\dots\dots$.

Ex 4 : 1) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-1, 2]$,

On note $Y = \sqrt{X+1}$. (on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)

- a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
- b) Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.
- 2) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 2]$,
On note $Y = (X+1)^2$. (on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)
 - a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - b) Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.
- 3) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{4}]$,
On note $Y = \tan(X)$. (on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)
 - a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - b) Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.
- 4) Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$,
On note $Y = X^3$. (on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)
 - a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - b) Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.
- 5) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$,
On note $Y = 1 - X^2$. (on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)
 - a) Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - b) Y est-elle une variable aléatoire à densité ? et si oui, en donner une.

6) Soit X une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre 1,

On note $Y = \frac{1}{X}$. (on remarque que Y est une variable aléatoire bien définie)

a) Déterminer la fonction de répartition de Y .

b) Y est-elle une variable aléatoire à densité? et si oui, en donner une.

Ex 5 : 1) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{2} \cdot \mathbb{1}_{[-1,1]}(t)$.

On note $Y = X^2$, déterminer la fonction de répartition de Y et justifier que Y est une variable à densité.

2) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \mathbb{1}_{]0,1]}(t)$.

On note $Y = |2X - 1|$, déterminer la fonction de répartition de Y et justifier que Y est une variable à densité.

3) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{3} \cdot \mathbb{1}_{[-1,2]}(t)$.

On note $Y = |X|$, déterminer la fonction de répartition de Y et justifier que Y est une variable à densité.

4) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto 2e^{-2t} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$.

On note $Y = (X - 1)^2$, déterminer la fonction de répartition de Y et justifier que Y est une variable à densité.

5) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \frac{1}{2}e^{-t/2} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$.

On note $Y = |X - 1|$, déterminer la fonction de répartition de Y et justifier que Y est une variable à densité.

6) Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto e^{-t} \mathbb{1}_{]0;+\infty[}(t)$.

On note $Y = -X^2$, déterminer la fonction de répartition de Y et justifier que Y est une variable à densité.

Ex 6 : Soit X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto 2e^{-2t} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$.

X suit une loi exponentielle de paramètre 2

on note $Y = X^2$ et $Z = (X - 1)^2$,

1) Déterminer la fonction de répartition de X .

2) Calculer la probabilité des événements : $[X \in [1, 3]]$, $[X < 3]$ et $[X \geq 3]$

3) Calculer la probabilité de l'événement : $[Y \in [1, 2]]$.

4) Déterminer la fonction de répartition de Y .

5) Calculer la probabilité de l'événement : $[Z \in [1, 2]]$.

6) Déterminer la fonction de répartition de Z .