

Feuille Cours_9_4 : Espérance et moments des variables aléatoires à densité.

Retour en arrière.

Ex 1 : Calculer si elle existe l'espérance des variables aléatoires suivantes :

- 1) X suivant la loi définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X = k) = \frac{1}{2^{k+1}}$
- 2) X suivant la loi définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $P(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$

Ex 2 : Rappeler l'espérance de toutes les lois discrètes usuelles.

Revenons aux variables aléatoires à densité.

Ex 3 : Calculer si elle existe l'espérance des variables aléatoires suivantes :

(on ne vérifiera pas que ce sont bien des densités)

- 1) X la variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathbb{1}_{0 < t < 1}$
- 2) X la variable aléatoire de densité $f : t \mapsto \frac{1}{2t^2} \mathbb{1}_{|t| > 1}$
- 3) X la variable aléatoire de densité $f : x \mapsto \begin{cases} 2x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
- 4) X la variable aléatoire de densité f la fonction définie par $\begin{cases} f(t) = -\frac{1}{2t^3} & \text{si } t < -1 \\ f(t) = 0 & \text{si } -1 \leq t \leq 1 \\ f(t) = \frac{3}{2t^3} & \text{si } t > 1 \end{cases}$

Ex 4 : Calculer l'espérance des lois à densité usuelles.

Ex 5 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0, 1]$,

Pour toutes les variables aléatoires suivantes :

$$Y_1 = \frac{1}{1+X} \qquad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{1-X}} \qquad Y_3 = \frac{1}{1-X}$$

Calculer si elle existe l'espérance $E(Y)$.

Ex 6 : Soit X une variable de densité $f : t \mapsto e^{-t} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ (Autrement dit : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$)

On définit la variable aléatoire

$$Y = \sin(X).$$

- 1) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par Y .
- 2) Montrer que l'espérance $\mathbb{E}(Y)$ existe.
- 3) Calculer $\mathbb{E}(Y)$.

Ex 7 : 1) Calculer les moments d'ordre 2 des lois usuelles.

2) Soit X une variable de densité $f : t \mapsto e^{-t} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ (Autrement dit : $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$)

Déterminer pour chaque entier n , s'il existe, le moment d'ordre n de X .

Ex 8 : Déterminer la variance des lois usuelles.

Ex 9 : Soient $h \in \mathbb{R}_+^*$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([x_0 - h, x_0 + h])$

Calculer l'écart-type de X . (Commenter ce résultat)

Ex 10 : Fonctions génératrices des moments.

Pour $t \in \mathbb{R}$ et X une variable aléatoire usuelle, calculer quand elle existe $E(e^{tX})$ dans tous les cas suivants :

- 1) $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$
- 2) $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a, b])$
- 3) $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
- 4) $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$