

Correction de la feuille Cours_9_3 : Variables aléatoires à densité.

- Ex 1 :** 1) X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto 2e^{-2t} \times \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t)$ X est à valeurs dans $]0, +\infty[$.
 2) X une variable aléatoire de densité : $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ X est à valeurs dans $]0, 1[$.
 3) (non corrigé)

- Ex 2 :** 1) a) X est à valeurs dans $]0; +\infty[$ et $Y = X^2 - X$; de plus en posant $u : x \mapsto x^2 - x$

x	0	1/2	$+\infty$
u	0	$\searrow$ $-1/4$	$\nearrow$ $+\infty$

donc

$$\boxed{Y \text{ est à valeurs dans } [-1/4; +\infty[}$$

- b) X est à valeurs dans $]0; +\infty[$ et $Y = X - \lfloor X \rfloor$;
 or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ donc $0 \leq x - \lfloor x \rfloor < 1$
 donc Y est à valeurs dans $]0, 1[$
 et ainsi

$$\boxed{F_Y(x) = 0 \text{ pour } x \leq 0, \text{ et } F_Y(x) = 1 \text{ pour } x \geq 1}$$

- 2) (non corrigé)

- Ex 3 :** 1) En prenant $u : t \mapsto t^2 - 3$ et $A = [1, 3]$, on a : $u(A) = [-2, 6]$ car u est continue et croissante sur $[1, 3]$.

- 2) En prenant $u : t \mapsto \frac{1}{t}$ et $A = [-1; 1] \setminus \{0\}$, on a $u(A) =]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$
 (En étudiant u sur $[-1; 1] \setminus \{0\}$)

- 3) En prenant $u : t \mapsto t^2 + 1$ et $A = [-1, 2]$, on a $u(A) = [1, 5]$ (En étudiant u sur $[-1; 2]$)

- Ex 4 :** 1) X suit la loi uniforme sur $[-1, 2]$ donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $[-1, 2]$ et $Y = \sqrt{X+1}$ donc Y prend ses valeurs dans $[0, \sqrt{3}]$

En posant $u : x \mapsto \sqrt{x+1}$

x	-1	2
u	0	$\nearrow$ $\sqrt{3}$

Pour $x \in [0, \sqrt{3}]$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\sqrt{X+1} \leq x) \\ &= P(X+1 \leq x^2) \quad x \geq 0 \text{ et } X+1 \text{ est à valeurs positives} \\ &= P(X \leq x^2 - 1) \\ &= F_X(x^2 - 1) \\ &= \frac{(x^2 - 1) + 1}{3} \quad \text{car } x^2 - 1 \in [-1, 2] \\ &= \frac{x^2}{3} \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\ 1 & \text{si } \sqrt{3} < x \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. *En particulier* $\begin{cases} \text{en } 0 : \lim_{0-} F_Y = \lim_{0+} F_Y = F_Y(0) \\ \text{en } \sqrt{3} : \lim_{\sqrt{3}-} F_Y = \lim_{\sqrt{3}+} F_Y = F_Y(\sqrt{3}) \end{cases}$
- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en 0 et $\sqrt{3}$.

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2x}{3} & \text{si } 0 \leq x \leq \sqrt{3} \\ 0 & \text{si } \sqrt{3} < x \end{cases}$$

- 2) X suit la loi uniforme sur $[0, 2]$ donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $[0, 2]$ et $Y = (X + 1)^2$ donc Y prend ses valeurs dans $[1, 9]$,

En posant $u : x \mapsto (x + 1)^2$

x	0	2
u	1	9

Pour $x \in [1, 9]$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P((X + 1)^2 \leq x) \\ &= P(X + 1 \leq \sqrt{x}) \quad x \geq 0 \quad \text{et } X + 1 \text{ est à valeurs positives} \\ &= P(X \leq \sqrt{x} - 1) \\ &= F_X(\sqrt{x} - 1) \\ &= \frac{\sqrt{x} - 1}{2} \quad \text{car } \sqrt{x} - 1 \in [0, 2] \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\sqrt{x} - 1}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq 9 \\ 1 & \text{si } 9 < x \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. *En particulier* $\begin{cases} \text{en } 1 : \lim_{1-} F_Y = \lim_{1+} F_Y = F_Y(1) \\ \text{en } 9 : \lim_{9-} F_Y = \lim_{9+} F_Y = F_Y(9) \end{cases}$
- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en 1 et 9.

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{si } 1 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{si } 9 < x \end{cases}$$

- 3) X suit la loi uniforme sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4x}{\pi} & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \\ 1 & \text{si } \frac{\pi}{4} < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $[0, \frac{\pi}{4}]$ et $Y = \tan(X)$ donc Y prend ses valeurs dans $[0, 1]$,

En posant $u : x \mapsto \arctan(x)$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
u	0	1

Pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\tan(X) \leq x) \\ &= P(X \leq \arctan(x)) \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}] \quad \text{et } X \text{ est à valeurs dans } [0, \frac{\pi}{4}] \\ &= F_X(\arctan(x)) \\ &= \frac{4}{\pi} \arctan(x) \quad \text{car } \arctan(x) \in [0, \frac{\pi}{4}] \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4}{\pi} \arctan(x) & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. *En particulier* $\begin{cases} \text{en } 0 : \lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0) \\ \text{en } 1 : \lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1) \end{cases}$

- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en 0 et 1.

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{4}{\pi(1+x^2)} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- 4) X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$ donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ et $Y = X^3$ donc Y prend ses valeurs dans $[-1, 1]$,

En posant $u : x \mapsto x^3$

x	-1	1
u	-1	1

Pour $x \in [-1, 1]$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(X^3 \leq x) \\ &= P(X \leq \sqrt[3]{x}) \quad t \mapsto t^3 \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= F_X(\sqrt[3]{x}) \\ &= \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{2} \quad \text{car } \sqrt[3]{x} \in [-1, 1] \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{\sqrt[3]{x} + 1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. *En particulier* $\begin{cases} \text{en } -1 : \lim_{-1^-} F_Y = \lim_{-1^+} F_Y = F_Y(-1) \\ \text{en } 1 : \lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1) \end{cases}$

- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en $-1, 0$ et 1 . (**Attention à 0**)

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}} & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ \frac{1}{6x^{\frac{2}{3}}} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- 5) X suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$ et $Y = 1 - X^2$ donc Y prend ses valeurs dans $] -\infty, 1]$,

En posant $u : x \mapsto 1 - x^2$

x	0	$+\infty$
u	1	$-\infty$

Pour $x \in]-\infty, 1]$,

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
 &= P(1 - X^2 \leq x) \\
 &= P(X^2 \geq 1 - x) \\
 &= P(X \geq \sqrt{1 - x}) \quad \text{car } 1 - x \geq 0 \text{ et } X \text{ est à valeurs positives} \\
 &= 1 - F_X(\sqrt{1 - x}) \\
 &= 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1 - x}\right)\right) \quad \text{car } \sqrt{1 - x} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1 - x}\right) & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier en 1 : $\lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1)$.
- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en 1.

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{1 - x}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sqrt{1 - x}\right) & \text{si } x \leq 1 \\ 0 & \text{si } 1 < x \end{cases}$$

- 6) X suit la loi exponentielle de paramètre 1, donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$ et $Y = \frac{1}{X}$ donc Y prend ses valeurs dans $]0, +\infty[$,

En posant $u : x \mapsto \frac{1}{x}$

x	0	$+\infty$
u	$+\infty$	0

Pour $x \in]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
 &= P\left(\frac{1}{X} \leq x\right) \\
 &= P\left(X \geq \frac{1}{x}\right) \quad \text{car } \frac{1}{x} > 0 \text{ et } X \text{ est à valeurs strictement positives} \\
 &= 1 - F_X\left(\frac{1}{x}\right) \\
 &= 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{1}{x}\right)\right) \quad \text{car } \frac{1}{x} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier en 0 : $\lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0)$.
- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en 0.

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x^2} \exp\left(-\frac{1}{x}\right) & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

Ex 5 : 1) • X suit la loi uniforme sur $[-1, 1]$ donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{2} & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

- X prend ses valeurs dans $[-1, 1]$ et $Y = X^2$ donc Y prend ses valeurs dans $[0, 1]$

En posant $u : x \mapsto x^2$

x	-1	0	1
u	1	0	1

- Pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
 &= P(X^2 \leq x) \\
 &= P(-\sqrt{x} \leq X \leq \sqrt{x}) \quad \text{car } x \geq 0 \\
 &= F_X(\sqrt{x}) - F_X(-\sqrt{x}) \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{2} - \frac{-\sqrt{x}+1}{2} \quad \text{car } -\sqrt{x} \in [-1, 1] \text{ et } \sqrt{x} \in [-1, 1]
 \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y : $F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

- ① Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier $\begin{cases} \text{en } 0 : \lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0) \\ \text{en } 1 : \lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1) \end{cases}$
- ② De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (peut-être) en 0 et 1.

donc Y est une variable à densité.

- En dérivant sur chaque intervalle on obtient une densité de X :

Une densité de Y : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

2) X suit la loi uniforme sur $[0, 1]$ donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $[0, 1]$ et $Y = |2X - 1|$ donc Y prend ses valeurs dans $[0, 1]$

En posant $u : x \mapsto x^2$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
u	1	0	1

Pour $y \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
 &= P(|2X - 1| \leq y) \\
 &= P(-y \leq 2X - 1 \leq y) \quad \text{car } y \geq 0 \\
 &= P\left(\frac{-y+1}{2} \leq X \leq \frac{y+1}{2}\right) \\
 &= F_X\left(\frac{y+1}{2}\right) - F_X\left(\frac{-y+1}{2}\right) \\
 &= \frac{y+1}{2} - \frac{-y+1}{2} \quad \text{car } \frac{-y+1}{2} \in [0, 1] \text{ et } \frac{y+1}{2} \in [0, 1] \\
 &= y
 \end{aligned}$$

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < 0 \\ y & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < y \end{cases}$$

On reconnait une loi à densité usuelle :

Y suit la loi uniforme sur $[0, 1]$

3) X suit la loi uniforme sur $[-1, 2]$ donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{x+1}{3} & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $[-1, 2]$ et $Y = |X|$ donc Y prend ses valeurs dans $[0, 2]$

En posant $u : x \mapsto x^2$

x	-1	0	2
u	1	0	2

Pour $y \in [0, 2]$,

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\ &= P(|X| \leq y) \\ &= P(-y \leq X \leq y) \quad \text{car } y \geq 0 \\ &= F_X(y) - F_X(-y) \\ &= \begin{cases} \frac{y+1}{3} - \frac{-y+1}{3} & \text{si } y \in [0, 1] \\ \frac{y+1}{3} - 0 & \text{si } y \in [1, 2] \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{2y}{3} & \text{si } y \in [0, 1] \\ \frac{y+1}{3} & \text{si } y \in [1, 2] \end{cases} \end{aligned}$$

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ \frac{2y}{3} & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ \frac{y+1}{3} & \text{si } 1 \leq y \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < y \end{cases}$$

❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier $\begin{cases} \text{en } 0 : \lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0) \\ \text{en } 1 : \lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1) \\ \text{en } 2 : \lim_{2^-} F_Y = \lim_{2^+} F_Y = F_Y(2) \end{cases}$

❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (peut-être) en 0, 1 et 2.

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{3} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{3} & \text{si } 1 < x < 2 \\ 0 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

4) X suit la loi exponentielle de paramètre 2 donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$ et $Y = (X - 1)^2$ donc Y prend ses valeurs dans $[0, +\infty[$

En posant $u : x \mapsto (x - 1)^2$

x	0	1	$+\infty$
u	1	0	$+\infty$

Pour $y \in [0, +\infty[$,

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
 &= P((X-1)^2 \leq y) \\
 &= P(-\sqrt{y} \leq X-1 \leq \sqrt{y}) \quad \text{car } y \geq 0 \\
 &= P(-\sqrt{y}+1 \leq X \leq \sqrt{y}+1) \\
 &= F_X(\sqrt{y}+1) - F_X(-\sqrt{y}+1) \\
 &= \begin{cases} 1 - \exp(-2(\sqrt{y}+1)) - 1 + \exp(-2(-\sqrt{y}+1)) & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 - \exp(-2(\sqrt{y}+1)) - 0 & \text{si } y \in [1, +\infty[\end{cases} \\
 &= \begin{cases} \exp(-2(-\sqrt{y}+1)) - \exp(-2(\sqrt{y}+1)) & \text{si } y \in [0, 1] \\ 1 - \exp(-2(\sqrt{y}+1)) & \text{si } y \in [1, +\infty[\end{cases}
 \end{aligned}$$

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y < -1 \\ \exp(2\sqrt{y}-2) - \exp(-2\sqrt{y}-2) & \text{si } 0 \leq y \leq 1 \\ 1 - \exp(-2\sqrt{y}-2) & \text{si } 1 \leq y \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier $\begin{cases} \text{en } 0 : \lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0) \\ \text{en } 1 : \lim_{1^-} F_Y = \lim_{1^+} F_Y = F_Y(1) \end{cases}$
- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en 0 et en 1.

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(2\sqrt{x}-2) + \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-2\sqrt{x}-2) & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} \exp(-2\sqrt{x}-2) & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

5) (*non corrigé*)

- 6) X suit la loi exponentielle de paramètre 1 donc d'après le cours : $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si } 0 < x \end{cases}$

X prend ses valeurs dans $]0; +\infty[$ et $Y = -X^2$ donc Y prend ses valeurs dans $] -\infty; 0[$

$$u : x \mapsto -x^2 \text{ décroissante sur }]0; +\infty[$$

Pour $y \in]-\infty; 0[$,

$$\begin{aligned}
 F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
 &= P(-X^2 \leq y) \\
 &= P(X^2 \geq -y) \\
 &= P(X \geq \sqrt{-y}) \quad \text{car } y \leq 0 \\
 &= 1 - F_X(\sqrt{-y}) \\
 &= e^{-\sqrt{-y}} \quad \text{car } \sqrt{-y} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$F_Y : y \mapsto \begin{cases} e^{-\sqrt{-y}} & \text{si } y < 0 \\ 1 & \text{si } 0 \leq y \end{cases}$$

- ❶ Cette fonction F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. En particulier en 0 : $\lim_{0^-} F_Y = \lim_{0^+} F_Y = F_Y(0)$
- ❷ De plus est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf (*peut-être*) en 0 .

donc Y est une variable à densité et une de ses densités est la fonction :

$$f : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{-x}} e^{-\sqrt{-x}} & \text{si } x \leq 0 \\ 0 & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Ex 6 : (*non corrigé*)