Correction de la feuille Cours_9_4 : Espérance et moments des variables aléatoires à densité.

Ex 1 : *(non corrigé)*

Ex 2 : *(non corrigé)*

Ex 3 : 1) • *(Existence de l'espérance)*

$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}t$ qui est une intégrale convergente donc

$$\boxed{X \text{ admet une espérance.}}$$

• *(Calcul de l'espérance)*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \frac{\sqrt{t}}{2}\,\mathrm{d}t \\ &= \left[\frac{1}{2}.\frac{2}{3}\,t^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{3}}$$

2) On remarque que : $\displaystyle\int_1^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t}\,\mathrm{d}t$ qui diverge *(En effet :* $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{2t}\,dt = \left[\frac{1}{2}\ln(t)\right]_1^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *)* donc

$$\boxed{X \text{ n'admet pas d'espérance.}}$$

3) *(non corrigé)*

4) *(non corrigé)*

Ex 4 : Loi uniforme.

X a pour densité $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = \dfrac{1}{b-a} & \text{si } a \leqslant t \leqslant b \\ f(t) = 0 & \text{si } t > 1 \end{cases}$.

• *(Existence de l'espérance)*

f est nulle en dehors de $[a,b]$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \frac{|t|}{b-a}\,\mathrm{d}t$

Cette dernière intégrale est celle d'une fonction continue sur un segment donc elle converge,

$$\boxed{X \text{ admet une espérance}}$$

• *(Calcul de l'espérance)*

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{t}{b-a}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^2}{2}\right]_a^b \\ &= \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} \end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$$

Loi exponentielle.

X a pour densité $\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ f(t) = \lambda e^{-\lambda t} & \text{si } 0 \leqslant t \end{cases}$.

- *(Existence de l'espérance)*

  f est nulle en dehors de $[0; +\infty[$ donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |t| f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \lambda t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t &= \Big[-te^{-\lambda t}\Big]_0^x - \int_0^x (-e^{-\lambda t})\,\mathrm{d}t && \text{Intégration par parties} \\
&= -xe^{-\lambda x} + \int_0^x e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= -xe^{-\lambda x} + \Big[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\Big]_0^x \\
&= -xe^{-\lambda x} - \frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \\
&\underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\lambda} && \text{Croissance comparée}
\end{aligned}$$

ainsi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente donc

$$\boxed{X \text{ admet une espérance}}$$

- *(Calcul de l'espérance)*

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}.}$$

Ex 5 :

Ex 6 : X est à valeurs dans $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1}{t+1}\right| f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt$ est convergente

(Fonction continue sur un segment)

donc $\boxed{Y_1 \text{ admet une espérance.}}$

et $\displaystyle E(Y_1) = \int_0^1 \frac{1}{1+t} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,dt = \ln(2)$

$$\boxed{E(Y_1) = \ln(2)}$$

- X est à valeurs dans $]0,1[$ et $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1}{\sqrt{1-t}}\right| f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt$

  Pour $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt &= \Big[-2\sqrt{1-t}\Big]_0^x \\
&= 2 - 2\sqrt{1-x} \\
&\underset{x \to 1}{\longrightarrow} 2
\end{aligned}$$

donc $\boxed{Y_2 \text{ admet une espérance.}}$

donc $E(Y_2)=\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}} f(t)\,dt=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t}}\,dt=2$

$$\boxed{E(Y_2) \text{ existe et est égale à } 2}$$

- X est à valeurs dans $]0,1[$ donc (*théorème de transfert*)

  ($E(Y_3)$ *existe si, et seulement si,* $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1}{1-t}\right| f(t)\,dt$)

  Ici $\displaystyle\int_0^1 \left|\frac{1}{1-t}\right| f(t)\,dt=\int_0^1 \frac{1}{1-t}\,dt$ et

  Pour $x \in]0,1[$,

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt &= \Big[-\ln(1-t)\Big]_0^x\\ &= -\ln(1-x)\\ &\underset{x\to 1}{\longrightarrow} +\infty\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{Y_3 \text{ n'admet pas d'espérance}}$$

Ex 7 : 1) X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ et $\sin(\mathbb{R}_+)=[-1,1]$ donc

$$\boxed{Y \text{ est à valeurs dans } [-1,1]}$$

2) *(On applique le théorème de transfert)*

Y admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |\sin(t)| f(t)\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-t}\mathrm{d}t$ converge

or $\begin{cases} \forall t\in\mathbb{R}_+, \quad 0\leqslant |\sin(t)|e^{-t}\leqslant e^{-t}\\ \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\mathrm{d}t \quad \text{converge}\end{cases}$ donc *(théorème de convergence)* $\displaystyle\int_0^{+\infty} |\sin(t)|e^{-t}\mathrm{d}t$ converge

et ainsi : $\boxed{\mathbb{E}(Y) \text{ existe}}$

3)

$$\begin{aligned}E(Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(t) f(t)\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} \sin(t)e^{-t}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

(J'utilise les nombres complexes)

$\sin(t)e^{-t}=\mathrm{Im}\left(e^{it}e^{-t}\right)=\mathrm{Im}\left(e^{(-1+i)t}\right)$ donc

$F : t \longmapsto \mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{-1+i}e^{(-1+i)t}\right)$ est une primitive de $t\longmapsto \sin(t)e^{-t}$

$F(t)=\mathrm{Im}\left(\dfrac{-1-i}{2}e^{(-1+i)t}\right)=-\dfrac{e^{-t}}{2}(\cos(t)+\sin(t))$ donc $F(0)=\dfrac{1}{2}$ et $\displaystyle\lim_{+\infty} F=0$

(bornée $\times$ converge vers 0)

$$\boxed{\mathbb{E}(Y)=\frac{1}{2}}$$

Ex 8 : *(non corrigé)*

Ex 9 : 1) • Pour $X \hookrightarrow \mathscr{U}([a,b])$,

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b \frac{t^2}{b-a}\,\mathrm{d}t$$

Cette dernière intégrale est celle d'une fonction continue sur un segment donc elle converge,

Théorème de transfert

$$\begin{aligned}
E(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b \frac{t^2}{b-a}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{b-a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_a^b \\
&= \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} && \textit{(Formule de Bernoulli)}
\end{aligned}$$

En conclusion :

X possède une variance et *(formule de Kœnig-Huygens)*

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \\
&= \frac{a^2+ab+b^2}{3} - \frac{a^2+2ab+b^2}{4} \\
&= \frac{a^2-2ab+b^2}{12}
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{(a-b)^2}{12} \qquad \text{et} \qquad \sigma_X = \frac{b-a}{2\sqrt{3}}}$$

- Pour $X \hookrightarrow \mathscr{E}(\lambda)$,

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t^2| f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt$$

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt &= \left[t^2(-e^{-\lambda t})\right]_0^x - \int_0^x 2t(-e^{-\lambda t})\,dt \\
&= -x^2 e^{-\lambda x} + \frac{2}{\lambda}\int_0^x t\lambda e^{-\lambda t}\,dt \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \frac{2}{\lambda} \times \underbrace{\frac{1}{\lambda}}_{E(X)}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X^2 \text{ admet une espérance}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = \int_0^{+\infty} \lambda t^2 e^{-\lambda t}\,dt = \frac{2}{\lambda^2} \qquad \boxed{E(X^2) = \frac{2}{\lambda^2}}$$

En conclusion :

X possède une variance et *(formule de Kœnig-Huygens)*

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = \frac{1}{\lambda^2} \qquad \text{et} \qquad \sigma_X = \frac{1}{\lambda}}$$

- Pour $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$,

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt$ est absolument convergente.

si, et seulement si, $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente.

si, et seulement si, $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$ est convergente.

(l'intégrande est pair)

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt &= \Big[t(-e^{-\frac{t^2}{2}})\Big]_0^x - \int_0^x (-e^{-\frac{t^2}{2}})\,dt \\
&= -xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt \\
&\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \frac{1}{2}\times\sqrt{2\pi}
\end{aligned}$$

$$\boxed{X^2 \text{ admet une espérance}}$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,dt = 2\times\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\times\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = 1$$

$$\boxed{E(X^2) = 1}$$

En conclusion :

X possède une variance et *(formule de Kœnig-Huygens)*

$$\begin{aligned}
V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\
&= 1 - 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{V(X) = 1 \qquad \text{et} \qquad \sigma_X = 1}$$

Ex 10 : *(non corrigé)*

Ex 11 : *(non corrigé)*