

Ex 1 : Soient $a > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur l'intervalle $]0, 1[$,

- 1) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire : $Y = -\frac{1}{a} \ln(1 - X)$?
- 2) Reconnaître la loi de Y .

Ex 2 : Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires suivant la même loi uniforme sur $[0, 1]$,

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

- 1) Rappeler la fonction de répartition de X_1 et X_2 .
- 2) Déterminer la fonction de répartition de Y .
- 3) Déterminer la fonction de répartition de Z .
- 4) Les variables Y et Z sont-elles des variables à densité ?

Ex 3 : Soient $(\lambda_1, \lambda_2) \in]0; +\infty[^2$, X_1 et X_2 deux variables aléatoires respectivement de loi $\mathcal{E}(\lambda_1)$ et $\mathcal{E}(\lambda_2)$,

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$

- 1) Déterminer la fonction de répartition de Y et celle de Z .
- 2) Montrer que Y et Z sont à densité.
- 3) Déterminer une densité de chacune de ces deux variables aléatoires.

Ex 4 : Soient $X_1, \dots, X_n$, n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([0, 1])$,

On note $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$

- ① Déterminer la fonction de répartition de Y et celle de Z .
- ② Montrer que : Z et $1 - Y$ ont la même loi.

Ex 5 : Soient $\lambda \in]0; +\infty[$, $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$,

On note $Y = \max(X_1, \dots, X_n)$ et $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$

- 1) Déterminer la fonction de répartition de Y et celle de Z .
- 2) Montrer que Y et Z sont à densité.
- 3) Déterminer une densité de chacune de ces deux variables aléatoires.

Ex 6 : Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires telles que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([-1, 1])$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([-2, 2])$

On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes et on note $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

- 1) Déterminer la fonction de répartition de Y .
- 2) En déduire une densité de probabilité de Y .
- 3) Déterminer la fonction de répartition de Z .
- 4) En déduire une densité de probabilité de Z .

Ex 7 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 2,

- 1) Rappeler la fonction de répartition de X .
- 2) Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$.
- 3) Déterminer la loi de $Z = X - \lfloor X \rfloor$.

Ex 8 : Soit X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$,

- 1) Rappeler la fonction de répartition de X .
- 2) Déterminer la fonction de répartition de $Y = \min\left(\frac{1}{2}, X\right)$
- 3) La variable aléatoire Y est-elle à densité ? si oui en donner une.

Ex 9 : Soit $\lambda > 0$.

On considère une suite $(S_k)_{k \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre λ .

On pose

$$T_0 = 0, \quad T_n = \sum_{k=1}^n S_k \quad (n \geq 1),$$

et, pour tout $t \geq 0$,

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\}.$$

- 1) Montrer que (pour l'instant les 3/2 admettent ce résultat), pour tout $n \geq 1$, la variable aléatoire T_n admet pour densité

$$f_{T_n}(t) = \lambda e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(t).$$

- 2) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \geq 0$,

$$(N_t \geq n) = (T_n \leq t).$$

- 3) À l'aide de la densité obtenue à la question 1, montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$P(T_n \leq t) = 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}.$$

Indication : Pour montrer $f(t) = g(t)$ on peut commencer par montrer que $t \mapsto f(t) - g(t)$ est constante

- 4) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(N_t = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Reconnaître la loi de N_t .

Contexte : modélisation des arrivées dans une file d'attente

On s'intéresse à la modélisation des arrivées de clients dans un système de file d'attente (par exemple : un guichet, une caisse, un standard téléphonique, un serveur informatique).

On fait l'hypothèse naturelle suivante : les arrivées des clients se produisent de manière totalement aléatoire dans le temps, sans mémoire du passé. Autrement dit, le fait qu'aucun client ne soit arrivé depuis un certain temps n'influence pas la probabilité de voir arriver le prochain client.

Cette hypothèse se traduit mathématiquement par la propriété d'absence de mémoire du temps d'attente jusqu'à la prochaine arrivée. Or, la seule loi de probabilité continue vérifiant cette propriété est la loi exponentielle.

On modélise donc les temps d'attente entre deux arrivées successives par une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Plus précisément, on note S_k le temps séparant l'arrivée du $(k-1)$ -ième client de celle du k -ième client. Les variables $(S_k)_{k \geq 1}$ sont supposées indépendantes et suivent toutes la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.

On définit alors

$$T_0 = 0, \quad T_n = \sum_{k=1}^n S_k \quad (n \geq 1),$$

où T_n représente l'instant d'arrivée du n -ième client.

Enfin, pour tout $t \geq 0$, on pose

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_n \leq t\},$$

qui représente le nombre de clients déjà arrivés dans le système avant l'instant t .

L'objectif de l'exercice est de déterminer la loi de N_t et de mettre en évidence le lien fondamental entre les temps d'attente exponentiels et la loi de Poisson.