

Ex 1 : 1) X prend ses valeurs dans $]0, 1[$ (car f est nulle en dehors de $]0, 1[$) donc

$1 - X$ est à valeurs dans $]0, 1[$ et $\ln(1 - X)$ est à valeurs dans $] -\infty; 0[$ et enfin comme $a > 0$:

$$Y = -\frac{1}{a} \ln(1 - X) \text{ prend ses valeurs dans }]0, +\infty[$$

Pour $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\left(-\frac{1}{a} \ln(1 - X) \leq x\right) \\ &= P(\ln(1 - X) \geq -ax) \quad \text{car } a > 0 \\ &= P(1 - X \geq \exp(-ax)) \quad \text{car } t \mapsto e^t \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \\ &= P(X \leq 1 - \exp(-ax)) \\ &= F_X(1 - \exp(-ax)) \\ &= 1 - \exp(-ax) \quad \text{car } 1 - \exp(-ax) \in [0, 1] \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[) \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - \exp(-ax) & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

2) On remarque que Y suit une loi exponentielle de paramètre a .

Cet exercice permet de justifier la simulation d'une loi exponentielle avec la fonction suivante :

```
def exponentielle(a):
    x = rd.random()
    y = -1/a * log(1-x)          # Ou encore      -1/a * log(x)
    return y
```

Ex 2 : 1) X_1 et X_2 suivent la loi uniforme sur $[0, 1]$ donc (c'est du cours) $F_{X_1} = F_{X_2} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

2) X_1 et X_2 sont à valeurs dans $[0, 1]$ donc $Y = \max(X_1, X_2)$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(\max(X_1, X_2) \leq x) \\ &= P((X_1 \leq x) \cap (X_2 \leq x)) \\ &= P(X_1 \leq x) \times P(X_2 \leq x) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= F_{X_1}(x) \times F_{X_2}(x) \\ &= x^2 \quad \text{car } x \in [0, 1] \end{aligned}$$

La fonction de répartition Y est la fonction :

$$F_Y : \begin{cases} \forall x < 0 & F_Y(x) = 0 \\ \forall x \in [0, 1] & F_Y(x) = x^2 \\ \forall x > 1 & F_Y(x) = 1 \end{cases}$$

3) X_1 et X_2 sont à valeurs dans $[0, 1]$ donc $Z = \min(X_1, X_2)$ est à valeurs dans $[0, 1]$.
pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= P(\min(X_1, X_2) \leq x) \\ &= 1 - P(\min(X_1, X_2) > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap (X_2 > x)) \quad \text{car } X_1 \text{ et } X_2 \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x)) \\ &= 1 - (1 - x)^2 \quad \text{car } x \in [0, 1] \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est la fonction :

$$F_Z : \begin{cases} \forall x < 0 & F_Z(x) = 0 \\ \forall x \in [0, 1], & F_Z(x) = 2x - x^2 \\ \forall x > 1 & F_Z(x) = 1 \end{cases}$$

- 4) Les fonction de répartition de Y et de Z sont continue sur $\mathbb{R}$ (*tout entier*) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1 et ainsi :

Y et Z sont des variables aléatoires à densité.

On peut préciser (*non demandé*) :

Y a pour densité la fonction $t \mapsto 2t \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ et Z la fonction $t \mapsto (2 - 2t) \cdot \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$

Ex 3 : (*non corrigé*)

Ex 4 : (*non corrigé*)

Ex 5 : Les X_i sont à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc Y et Z aussi :

Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= P((X_1 \leq x) \cap \dots \cap (X_n \leq x)) \\ &= P(X_1 \leq x) \times \dots \times P(X_n \leq x) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^n \quad \text{car } x > 0 \text{ et les } X_i \text{ suivent la loi exponentielle de paramètre } \lambda \end{aligned}$$

La fonction de répartition Y est la fonction :

$$F_Y : \begin{cases} \forall x < 0 & F_Y(x) = 0 \\ \forall x \in [0; +\infty[, & F_Y(x) = (1 - e^{-\lambda x})^n \end{cases}$$

Pour $x \in \mathbb{R}^+$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - P((X_1 > x) \cap \dots \cap (X_n > x)) \\ &= 1 - P(X_1 > x) \times \dots \times P(X_n > x) \quad \text{car } X_1, \dots, X_n \text{ sont indépendantes} \\ &= 1 - (e^{-\lambda x})^n \quad \text{car } x > 0 \text{ et les } X_i \text{ suivent la loi exponentielle de paramètre } \lambda \end{aligned}$$

La fonction de répartition Z est la fonction :

$$F_Z : \begin{cases} \forall x < 0 & F_Z(x) = 0 \\ \forall x \in [0; +\infty[, & F_Z(x) = 1 - e^{-\lambda nx} \end{cases}$$

On remarque que : Z suit la loi $\mathcal{E}(n\lambda)$

Ex 6 : (*non corrigé*)

Ex 7 : 1) (*Question de cours*)

La fonction de répartition de X est $F_X : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$

- 2) X est prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $Y = \lfloor X \rfloor$ prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$ (*C'est une variable discrète*).

Pour $x \in \mathbb{R}^+$, (*Je ne fais pas comme au tableau*)

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\lfloor X \rfloor \leq x) \\ &= P(X < \lfloor x \rfloor + 1) \\ &= F_X(\lfloor x \rfloor + 1) \\ &= 1 - e^{-2\lfloor x \rfloor - 2} \quad \text{car } \lfloor x \rfloor + 1 \geq 0 \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-2\lfloor x \rfloor - 2} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

Au tableau on a donné la loi de cette variable discrète :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et pour tout } k \in \mathbb{N}, \quad P(Y = k) = (1 - e^{-2})e^{-2k} \quad (P(Y = k) = F_Y(k) - F_Y(k-1))$$

$Y + 1$ suit la loi géométrique de paramètre $1 - e^{-2}$

3) X est prend ses valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $Z = X - \lfloor X \rfloor$ prend ses valeurs dans $[0, 1[$

Pour $x \in [0, 1[$,

$$\begin{aligned} P(Z \leq x) &= P\left(X \in \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [n, n+x]\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (X \in [n, n+x])\right) \quad (X \text{ est à valeurs dans } \mathbb{R}^+). \\ &= \sum_{n \in \mathbb{N}} P(X \in [n, n+x]) \quad (\text{événements deux à deux incompatibles}). \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_n^{n+x} 2e^{-2t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (1 - e^{-2x})e^{-2n} \\ &= (1 - e^{-2x}) \times \frac{1}{1 - e^{-2}} \quad (\text{car } -1 < e^{-2} < 1) \end{aligned}$$

$$F_Z : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1 - e^{-2x}}{1 - e^{-2}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La fonction de répartition de Z est bien continue sur $\mathbb{R}$ (*tout entier*) et de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf peut-être en 0 et en 1 et ainsi :

Z est une variable aléatoire à densité.

et la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{2e^{-2x}}{1 - e^{-2}} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ est une densité de Z

Remarque : X, Y et Z montrent que la somme de deux variables à densité peut être discrète !!!

Mais lequel ?

Ex 8 : X prend ses valeurs dans $[0, 1]$ (car f est nulle en dehors de $[0, 1]$) et $Y = \min\left(\frac{1}{2}, X\right)$ donc

Y prend ses valeurs dans $\left[0, \frac{1}{2}\right]$

Pour $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, (On traite à part $\frac{1}{2}$)

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P\left(\min\left(\frac{1}{2}, X\right) \leq x\right) \\ &= P(X \leq x) \quad \text{car } x < \frac{1}{2} \\ &= F_X(x) \\ &= x \quad \text{car } x \in [0, 1] \text{ et } X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \end{aligned}$$

$$F_Y : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Remarque : $P\left(Y \leq \frac{1}{2}\right) = 1$

Remarque : Y est un exemple de variable mixte, ni discrète, ni à densité.

Ex 9 : (non corrigé)