

Ex 1 : Soit f la densité continue de la loi normale centrée réduite.
Dresser le tableau de variation de f .

Ex 2 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite.
Calculer l'espérance, la variance et l'écart-type de X .

Ex 3 :

- 1) Montrer que C_f présente un point d'inflexion au point d'abscisse 1.
- 2) Démontrer que la tangente à C_f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f(1)(2 - x)$.
- 3) En remarquant que $f(1) \approx 0,25$ tracer cette tangente dans un repère.
- 4) Justifier que la tangente en 0 est horizontale.
- 5) En remarquant que $f(0) \approx 0,4$ tracer C_f dans le même repère.

Ex 4 : Etude de la fonction de répartition. On note Φ la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- 1) Montrer que Φ est strictement croissante.
- 2) Montrer que Φ réalise une bijection de $] -\infty; +\infty[$ sur $]0, 1[$.
- 3) Calculer $\Phi(0)$.
- 4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(-x) + \Phi(x) = 1$.
- 5) Interpréter graphiquement l'égalité précédente.
- 6) Tracer la représentation graphique de Φ .

Ex 5 :

- 1) Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $Y = -X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.
- 2) Montrer que :
si X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}(]0, 1[)$, alors $Y = \Phi^{-1}(X)$ suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
- 3) Montrer que si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ alors $\forall a \geq 0, \quad P(|X| \leq a) = 2\Phi(a) - 1$.

Ex 6 : Fonction des quantiles.

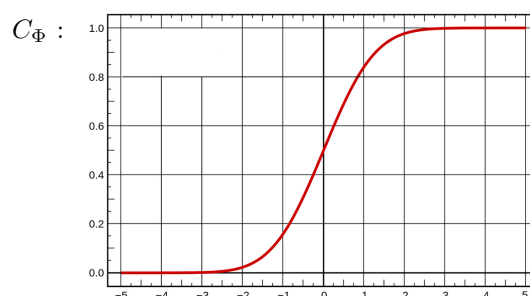
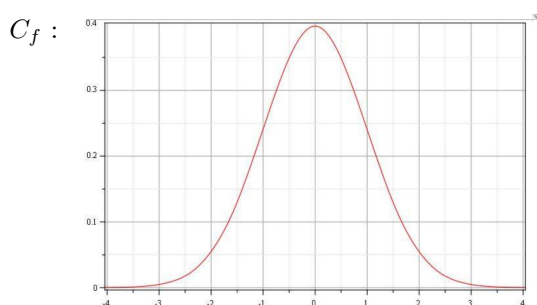
On appelle fonction des quantiles, la réciproque de la bijection : $\mathbb{R} \longrightarrow]0, 1[$
 $x \longmapsto \Phi(x)$

On la note Φ^{-1} ou encore : $\alpha \longmapsto u_\alpha$

1) Compléter :

- Pour α appartenant à, $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$
- Pour α appartenant à, u_α est l'unique élément de vérifiant
- Pour X suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $P(X \leq u_\alpha) = \dots\dots\dots$ $P(X \geq u_\alpha) = \dots\dots\dots$
- $u_{0,5} = \dots\dots\dots$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha = \dots\dots\dots$ $\lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\alpha = \dots\dots\dots$ $u_{0,025} = \dots\dots\dots$ $u_{0,975} = \dots\dots\dots$

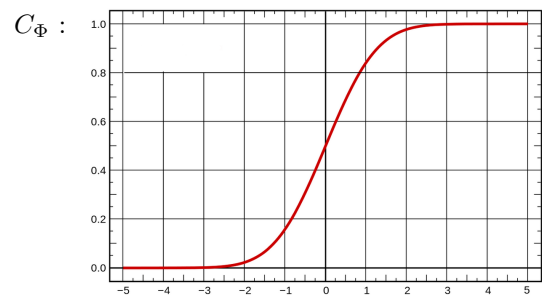
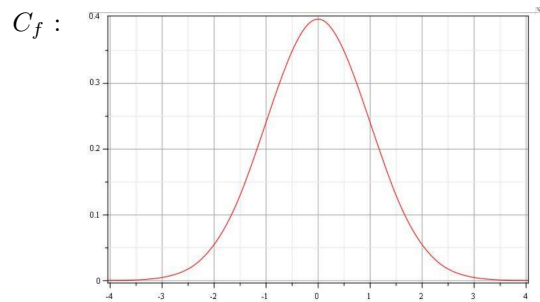
2) Illustrer graphiquement la définition de u_α sur les deux représentations suivantes :



3) Démontrer que pour tout $\alpha \in]0, 1[$,

$$u_{1-\alpha} = -u_{\alpha}$$

4) Illustrer graphiquement le résultat précédent sur les deux représentations suivantes :



5) Soit $\alpha \in]0, 1[$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

a. Compléter :

$$P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq X \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = \dots\dots\dots$$

b. Démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha$$

6) Illustrer graphiquement le résultat précédent sur les deux représentations suivantes :

