

Correction de la feuille cours_10 : Loi normale centrée réduite.

Ex 1 : $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) = -\frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	$\begin{array}{ccc} & \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & \\ & \nearrow \quad \searrow & \\ 0 & & 0 \end{array}$		

Pour la limite en ∞ : $\lim_{t \rightarrow +\infty} -\frac{t^2}{2} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$

Remarque : f est une fonction paire.

Ex 2 : • (Existence de l'espérance)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |t|f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|t|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

L'intégrande est pair, étudions : $\int_0^{+\infty} \frac{|t|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^x t e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_0^x \\ &= 1 - e^{-\frac{x^2}{2}} \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1 \end{aligned}$$

ainsi $\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt$ est absolument convergente donc

 X admet une espérance

• (Calcul de l'espérance)

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= 0 \quad \text{car l'intégrande est impair} \end{aligned}$$

 $E(X) = 0.$

X^2 admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt$ est absolument convergente.

si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente.

si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ est convergente.

(l'intégrande est pair)

Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}\int_0^x t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt &= \left[t(-e^{-\frac{t^2}{2}}) \right]_0^x - \int_0^x (-e^{-\frac{t^2}{2}}) dt \\ &= -xe^{-\frac{x^2}{2}} + \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 + \frac{1}{2} \times \sqrt{2\pi}\end{aligned}$$

X^2 admet une espérance

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t) dt = 2 \times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \times \int_0^{+\infty} t^2 e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1$$

$E(X^2) = 1$

En conclusion :

X possède une variance et (*formule de Kœnig-Huygens*)

$$\begin{aligned}V(X) &= E(X^2) - E(X)^2 \\ &= 1 - 0\end{aligned}$$

$V(X) = 1$ et $\sigma_X = 1$

Ex 3 : 1) Un **point d'inflexion** est un point où il y a un changement de convexité.
Autrement dit un point où la dérivée atteint un maximum ou un minimum.
Ou encore un point où la dérivée seconde s'annule et change de signe.
Graphiquement en un point d'inflexion la courbe traverse sa tangente.
Pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f''(t) &= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} + \frac{t^2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \frac{t^2 - 1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

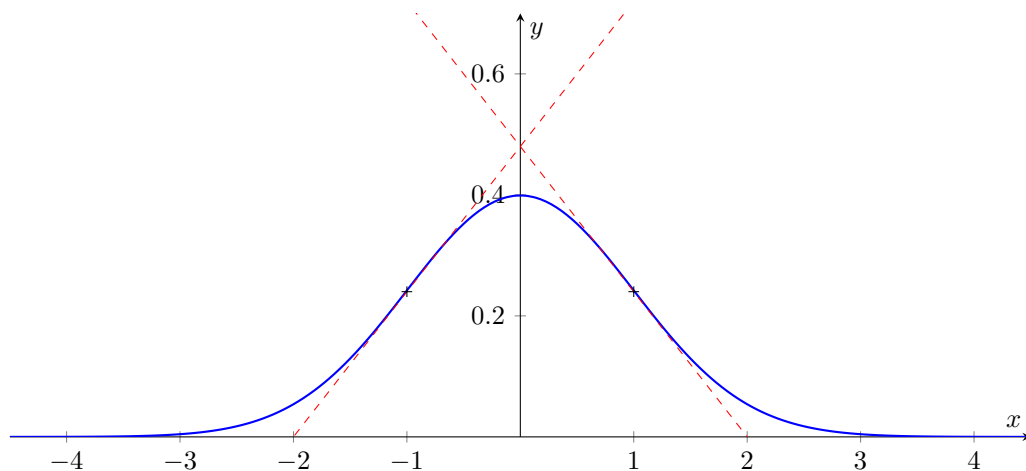
donc f'' s'annule une seule fois en 1 sur $\mathbb{R}^+$ et change de signe donc

C_f présente un unique point d'inflexion sur $\mathbb{R}^+$: $A(1, f(1))$

2) $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$ et comme $f'(1) = -f(1)$ donc

$T : y = f(1)(2 - x)$

$f(0) \approx 0,4$ et $f(1) \approx 0,25$.



Ex 4 : Remarque : Comme $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$ est continue sur $\mathbb{R}$ (en entier), Φ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de f .

1) Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \Phi'(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$

Φ est strictement croissante

2) Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, Φ est continue sur $\mathbb{R}$, $\lim_{-\infty} \Phi = 0$ et $\lim_{+\infty} \Phi = +\infty$
donc (Théorème de la bijection) :

Φ réalise une bijection de $] -\infty; +\infty[$ sur $] 0, 1[$

3) $\Phi(0) = \int_{-\infty}^0 f(t)dt$; or f est paire donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 2 \int_{-\infty}^0 f(t)dt$ et comme $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)dt = 1$ donc

$$\Phi(0) = \frac{1}{2}$$

4) On note $g : t \mapsto \Phi(-x) + \Phi(x)$.

Cette fonction g est dérivable et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = -f(-x) + f(x) = 0$ car f est paire.

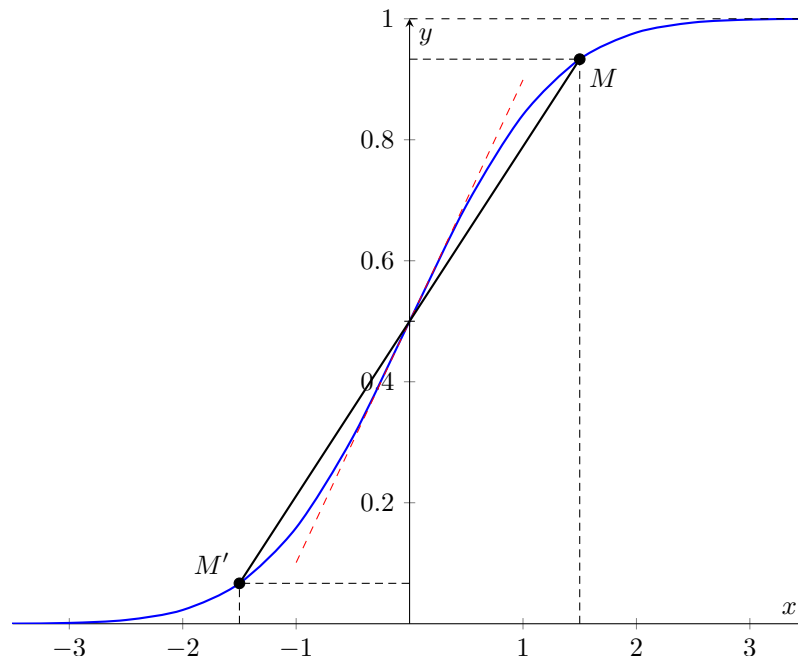
La fonction g est donc une fonction constante sur $\mathbb{R}$ et comme $g(0) = 2\Phi(0)$ il vient que g est la fonction constante égale à 1.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \Phi(x) + \Phi(-x) = 1$$

5) La relation précédente s'écrit : $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{\Phi(0-x) + \Phi(0+x)}{2} = \frac{1}{2}$ donc

$$C_\Phi \text{ est symétrique par rapport à } A \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

6) Représentation de la courbe de Φ avec la mise en évidence de la symétrie.



Rappel. La courbe représentative d'une fonction f admet une symétrie centrale par rapport au point $A(a, b)$ si, et seulement si, pour tout réel h , on a $\frac{f(a-h) + f(a+h)}{2} = b$.

Autrement dit, les points de la courbe d'abscisses $a-h$ et $a+h$ sont symétriques par rapport au point $A(a, b)$, qui est le milieu du segment les reliant.

Ex 5 : 1) On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et on note a $Y = -X$,
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(-X \leq x) \\ &= P(X \geq -x) \\ &= 1 - P(X \leq -x) \\ &= 1 - \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) \end{aligned} \quad \text{D'après Ex4 4)}$$

Φ est la fonction de répartition de Y donc

$$\boxed{-X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)}$$

2) Montrer que :

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$ et on note a $Y = \Phi^{-1}(X)$,
Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\Phi^{-1}(X) \leq x) \\ &= P(X \leq \Phi(x)) \quad \text{car } \Phi \text{ est une bijection strict. croissante} \\ &= \Phi(x) \quad \text{car } \Phi(x) \in]0, 1[\end{aligned}$$

Φ est la fonction de répartition de Y donc

$$\boxed{\text{Si } X \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[) \text{ alors } \Phi^{-1}(X) \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)}$$

3) Soient $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$ et $a \in \mathbb{R}_+$,

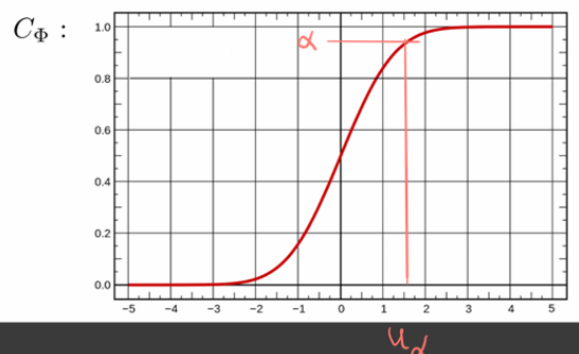
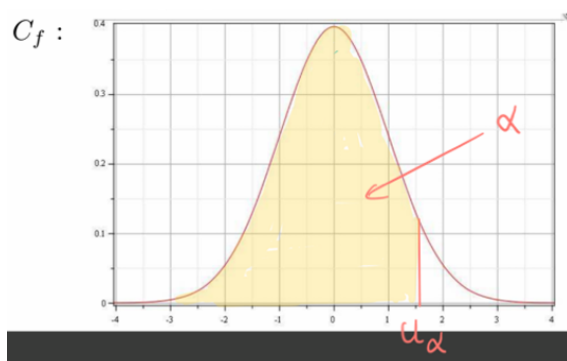
$$\begin{aligned} P(|X| \leq a) &= P(-a \leq X \leq a) \\ &= \Phi(a) - \Phi(-a) \\ &= \Phi(a) - (1 - \Phi(a)) \\ &= 2\Phi(a) - 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{P(|X| \leq a) = 2\Phi(a) - 1}$$

Ex 6 : 1) Compléter :

- Pour α appartenant à $]0, 1[$, $u_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$
- Pour α appartenant à $]0, 1[$, u_α est l'unique élément de $] - \infty, +\infty[$ vérifiant $\Phi(u_\alpha) = \alpha$
- Pour X suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$, $P(X \leq u_\alpha) = \alpha$ $P(X \geq u_\alpha) = 1 - \alpha$
- $u_{0.5} = 0$, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} u_\alpha = -\infty$ $\lim_{\alpha \rightarrow 1} u_\alpha = +\infty$ $u_{0.025} = -1,96$ $u_{0.975} = 1,96$

2) Illustration de la définition de la fonction des quantiles.



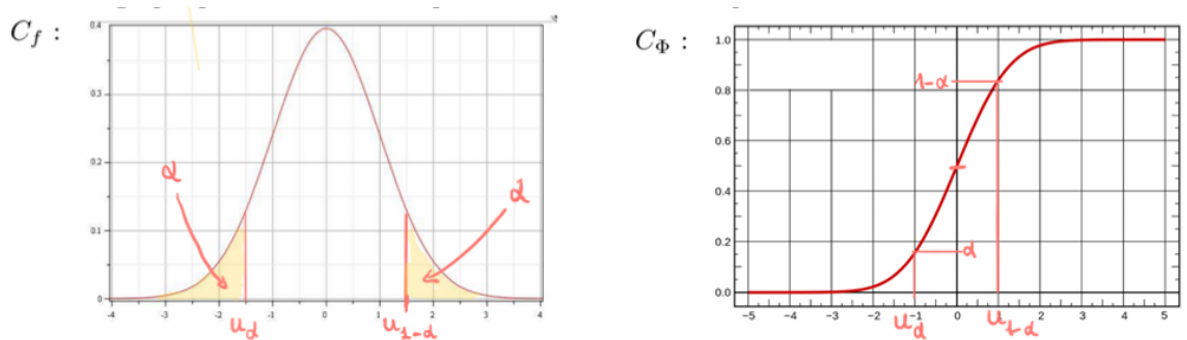
3) Pour $\alpha \in]0, 1[$,

$$\begin{aligned}\Phi(-u_\alpha) &= 1 - \Phi(u_\alpha) && \text{d'après Ex4. 4)} \\ &= 1 - \alpha \\ &= \Phi(u_{1-\alpha})\end{aligned}$$

or Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{-u_\alpha = u_{1-\alpha}}$$

4) Cette formule vient de la symétrie représentée sur la figure suivante :



5) a.

$$P(-u_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq X \leq u_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 2\Phi(u_{1-\frac{\alpha}{2}}) - 1 = 2\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = 1 - \alpha$$

b. On en déduit directement :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u_{1-\frac{\alpha}{2}}}^{u_{1-\frac{\alpha}{2}}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1 - \alpha$$

6)

