

Feuille Cours_10.2 : Sommes de deux variables à densité. Produit de convolution.

Ex 1 : (★) Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ (sauf peut-être en un nombre fini de points),

Montrer que : si $x < 0$, alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt = 0$

sinon $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt = \int_0^x f(t) dt.$

Ex 2 : (★★) Soient a, b, c et d des réels vérifiant $a < b$ et $c < d$,

On cherche dans cette question à exprimer $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) dt$ en fonction de x .

1) Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[c,d]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x-t) dt$

Quitte à changer le rôle de $[a, b]$ et $[c, d]$, on peut supposer $b - a \leq d - c$.

2) Montrer que $\mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) = \mathbb{1}_{[x-d, x-c]}(t)$

3) En déduire $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) dt$ en fonction des valeurs du réel x .

Indication : On distinguera les cas : $x < a + c$, $x \in [a + c, b + c]$, $x \in [b + c, a + d]$, $x \in [a + d, b + d]$ et $x \geq b + d$.

4) Représenter la courbe de $\varphi : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) dt$

5) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(x) = \max(0; \min(b, x - c) - \max(a, x - d))$$

Ex 3 : (★) Calculer des intégrales suivantes : (On donnera le résultat en fonction du réel x)

1) $f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[x-1, x+1]}(t) dt$

4) $f_4(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt$

2) (★) $f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x-t) dt$

5) $f_5(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t e^x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt$

3) (★) $f_3(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0, 1]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[0, 2]}(x-t) dt$

6) $f_6(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x-3t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt$

Ex 4 : (★) Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi exponentielle de paramètre λ .

1) Justifier que $Z = X + Y$ est à densité et déterminer une densité de Z .

2) Déterminer la fonction de répartition de Z .

Ex 5 : (★) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[0, 1]$.

1) Justifier que $Z = X + Y$ est à densité et déterminer une densité de Z . (Représenter cette fonction)

2) Déterminer la fonction de répartition de Z . (Représenter cette fonction)

Ex 6 : (★) Soient X, Y deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi normale centrée réduite.

1) Justifier que $Z = X + Y$ est à densité et déterminer une densité de Z .

2) Reconnaître la loi de Z .

Ex 7 : (★ ★ ★) *Le but de cet exercice est de démontrer le théorème donnant la somme de deux gaussiennes indépendantes.*

1) Soient σ un réel strictement positif et

X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que :

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \text{et} \quad Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$$

a. Quelle est la loi de $X + Y$? (*en utilisant le théorème*).

b. On fixe x dans $\mathbb{R}$, quelle est la forme canonique du polynôme $t \mapsto \frac{t^2}{\sigma^2} + (x - t)^2$?

$$\text{Indication : La réponse est : } \frac{\sigma^2 + 1}{\sigma^2} \left(t - \frac{x\sigma^2}{1 + \sigma^2} \right)^2 + \frac{x^2}{1 + \sigma^2}.$$

c. Démontrer la réponse de la question 1)a. par le calcul.

2) Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires, σ_1, σ_2 deux réels strictement positifs et μ_1, μ_2 deux réels quelconques.

On suppose que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et que X_1 et X_2 sont indépendantes.

On note $Y_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sigma_1}$ et $Y_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sigma_2}$ (*sic*)

a. Donner la loi de Y_1 et de Y_2 .

b. En déduire avec ce qui a été démontré en 1) la loi de $Y_1 + Y_2$.

c. Exprimer $X_1 + X_2$ en fonction de $Y_1 + Y_2$ et des réels $\sigma_1, \sigma_2, \mu_1, \mu_2$.

d. Conclure.