

Feuille info_21 : Simulation des lois à densité.

Le module **random** permet de générer des nombres flottants aléatoires compris entre 0 et 1 à l'aide de la fonction **random()**. Autrement dit elle permet de simuler la réalisation d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $]0, 1[$

Dans ce TD on alterne les questions de mathématiques et d'informatique, identifiez les questions d'informatiques et concentrez-vous dessus.

Remarques générales :

- Pour des résultats représentatifs on choisira un nombre de simulations $N = 10000$
- Pour trier les résultats, on utilisera la fonction native **sorted()**
- La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est donnée par **scipy.stats.norm.cdf**

Dans cette feuille, on voit deux façons différentes de simuler des lois à densité.

La première est basée sur le théorème suivant :

Soit X une variable aléatoire à densité, on note F sa fonction de répartition.

On suppose que : X est à valeurs dans $]a, b[$ et que F est strictement croissante sur $]a, b[$.

on peut alors définir $F^{-1} :]0, 1[\rightarrow]a, b[$

Si U suit la loi $\mathcal{U}(]0, 1[)$ alors $F^{-1}(U)$ suit la même loi que X

Ex 1 : Loi exponentielle.

Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda > 0$ et X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

- 1) Rappeler la fonction de répartition de X .
- 2) Démontrer que si $U \hookrightarrow \mathcal{U}(]0, 1[)$ alors $-\frac{1}{\lambda} \ln(1 - U)$ et X suivent la même loi.
- 3) En déduire une fonction permettant de simuler la réalisation de X .
- 4) Ecrire un programme permettant d'estimer l'espérance de X à l'aide d'une longue série de simulations.
- 5) Rappeler l'espérance de X .
- 6) Tracer la courbe de fréquences cumulées des valeurs de X au cours d'une longue série de simulations.
- 7) Tracer dans le même repère la fonction de répartition de X .

Ex 2 : (Agro 2021)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{e^{-x}}{(1 + e^{-x})^2}$.

- 1) Montrer que f est une densité de variable aléatoire réelle.
Soit X une variable aléatoire de densité f .
- 2) Déterminer la fonction de répartition F de X .
- 3) a. Justifier que F est bijective de $\mathbb{R}$ sur $]0, 1[$ et que sa fonction réciproque est donnée par :

$$\forall y \in]0, 1[, F^{-1}(y) = \ln \left(\frac{y}{1 - y} \right)$$

- b. En déduire que si U est une loi uniforme sur $]0, 1[$, alors X a même loi que $\ln \left(\frac{U}{1 - U} \right)$.
- c. En déduire un programme Python permettant d'obtenir une estimation de l'espérance de X en cas d'existence.
- 4) a. Justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} t f(t) dt$ est convergente.
- b. Montrer que la fonction f est paire.
- c. En déduire que X admet une espérance et déterminer $\mathbb{E}(X)$.
- 5) Tracer dans le même repère la fonction de répartition de X et la courbe de fréquences cumulées obtenus au cours d'une longue série de simulations de la variable aléatoire X .

Somme de loi uniformes indépendantes.

Ex 3 : Somme de deux uniformes sur $[0, 1]$

Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([0, 1])$.

on note $X = X_1 + X_2$

- 1) Ecrire une fonction qui simule la réalisation de X .
- 2) Tracer la courbe de fréquences cumulées des valeurs de X au cours d'une longue série de simulations.

3) Démontrer que X a pour densité la fonction : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Déterminer F_X la fonction de répartition de X .

- 4) Représenter la courbe de F_X avec la courbe de fréquences cumulées de la question 2)
- 5) Ajouter sur le représentation précédente la courbe de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ex 4 : Somme de 3 uniformes sur $[-1, 1]$.

Soient X_1, X_2 et X_3 trois variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([-1, 1])$.

on note $X = X_1 + X_2 + X_3$

- 1) Ecrire une fonction qui simule la réalisation de X .
- 2) Tracer la courbe de fréquences cumulées des valeurs de X au cours d'une longue série de simulations.

3) On admet que X a pour densité la fonction : $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq -3 \\ \frac{1}{16}(x+3)^2 & \text{si } -3 < x \leq -1 \\ \frac{3}{8} - \frac{x^2}{8} & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ \frac{1}{16}(x-3)^2 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Déterminer la fonction de répartition F de X .

- 4) Représenter la courbe de F avec la courbe de fréquences cumulées de la question 2)
- 5) Calculer l'espérance et la variance de X .
- 6) Ajouter sur le représentation précédente la courbe de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Ex 5 : Somme de 5 uniformes sur $[-1, 1]$.

Soient X_1, X_2, X_3, X_4 et X_5 cinq variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{U}([-1, 1])$.

on note $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$

- 1) Ecrire une fonction qui simule la réalisation de X .
- 2) Calculer l'espérance μ et σ^2 la variance de X .

On note $X^* = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

- 3) Tracer la courbe de fréquences cumulées des valeurs de X^* au cours d'une longue série de simulations.
- 4) Ajouter sur le représentation précédente la courbe de la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.