

Feuille Exo_19 : Sommes de deux variables à densité. Produit de convolution.

- Ex 1 :** Deux bactéries A et B sont présentes dans le sang humain, leur concentration est une valeur aléatoire modélisée par une loi gaussienne, $C_A \hookrightarrow \mathcal{N}(12, 2)$ et $C_B \hookrightarrow \mathcal{N}(14, 1)$. (*Le 2ième paramètre est la variance*) Quelle est la probabilité (*une valeur approchée*) que dans le sang d'un individu il y ait moins de bactéries A que de bactéries B ? *Indication : On pourra utiliser $X = C_B - C_A$.*
- Ex 2 :** Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 0.6$ mm et $\sigma^2 = 0.01$, et on suppose que les épaisseurs des différentes crêpes sont des variables aléatoires indépendantes. On note X la variable aléatoire à l'épaisseur du paquet en mm.
- 1) Quelle est la loi de X ? quelle est son espérance?
 - 2) Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6,3 mm et 6,6 mm (*utiliser la table*).
- Ex 3 :** Soient $\lambda_1 \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}_+^*$ et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement la loi exponentielle de paramètre λ_1 et celle de paramètre λ_2 .
- 1) Déterminer la fonction de répartition de $Y = -X_2$, puis une de ses densités (après avoir justifié de leur existence).
 - 2) En déduire une densité de $X_1 - X_2$.
 - 3) Montrer que $P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.
 - 4) Deux guichets sont ouverts à la poste. Le temps d'attente du guichet A (resp. du guichet B) suit une loi exponentielle de moyenne 20mn (resp. 30mn). Deux clients Lucien et Justin rentrent simultanément Lucien choisit le guichet A et Justin le guichet B .
 - a. Donner les paramètres des deux lois exponentielles.
 - b. En moyenne, après combien de temps voit-on sortir l'un des deux clients (*le premier*)?
 - c. En moyenne, après combien de temps voit-on sortir le deuxième?
 - d. Quelle est la probabilité que Lucien sorte avant Justin?
- Ex 4 :** Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. On note $Y = X^2$,
- 1) Rappeler la loi de X et déterminer la loi de Y .
 - 2) Calculer si elles existent l'espérance et l'écart-type de Y .
 - 3) (**Oral Agro**) On se place dans un repère orthonormé du plan. Un point M est choisi au hasard dans le rectangle $R = \left[-1, \frac{3}{2}\right] \times \left[-1, \frac{3}{2}\right]$, de telle sorte que (X_1, X_2) les coordonnées de M soient des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ et on définit $D = X_1^2 + X_2^2$, qui représente le carré de la distance du point M au point $O(0, 0)$.
Déterminer la probabilité que le point M soit situé à une distance strictement inférieure à 1 de l'origine.
- Ex 5 :**
- 1) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[-1, 1]$.
 - a. Déterminer une densité de $Y = X_1 + X_2$.
 - b. Déterminer la fonction de répartition de Y .
 - 2) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les $\mathcal{U}([0, 1])$ et $\mathcal{U}([0, 2])$.
 - a. Déterminer une densité de $Y = X_1 + X_2$.
 - b. Déterminer la fonction de répartition de Y .
- Ex 6 :** (*Inspiré d'un sujet d'oral : Exemple 4, 2021*)
Soient λ et $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([0, \theta])$ et Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .
On suppose que X et Y sont indépendantes.
- 1) Justifier que $Z = X + Y$ est une variable aléatoire et déterminer une de ses densités.
 - 2) Déterminer la fonction de répartition de Z .

Ex 7 : Soient n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $Y_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$

- 1) Déterminer l'espérance de S_n .
- 2) Déterminer l'écart-type de S_n .
- 3) Quelle est la loi de Y_n ?

Ex 8 : (Classique) Loi du Chi2 à deux degrés liberté.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

- 1) Déterminer la loi de X^2 .

- 2) Soit x un réel strictement positif,

montrer que $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

(on utilisera un changement de variable affine)

- 3) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ est convergente et la calculer.

(on utilisera le changement de variable $t = \cos^2(x)$)

- 4) Déterminer la loi de $X^2 + Y^2$, son espérance et sa variance.

Ex 9 : (Exemple de sujet d'oral 2024)

- 1) Soient $\lambda > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VAR indépendantes, de même loi que X .

On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.

- a. À l'aide d'une récurrence, montrer que la fonction f_n définie ensuite est une densité de probabilité.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- b. En utilisant la convolution et une récurrence, montrer que f_n est une densité de S_n pour tout $n \geq 1$.

- 2) On suppose qu'à un arrêt, les différences entre les horaires de passage successifs d'un bus sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ . On définit un instant $S_0 = 0$, puis on note S_1, S_2 , etc, les horaires de passage successifs des bus. On note alors, pour $t > 0$, N_t le nombre de bus passés à l'arrêt, entre l'instant 0 et l'instant t . Autrement dit : $\forall n \geq 0, [N_t = n] = [S_n \leq t < S_{n+1}]$.

- a. Pour $n \geq 0$, exprimer (avec soin) l'événement $[N_t \geq n]$ à l'aide de S_n .

- b. Justifier alors que : $\forall n \geq 0, P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$.

- c. En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .

- 3) On suppose plus précisément que les horaires de passages successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus.

On se pose alors les deux questions suivantes : - Combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ? - Combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ? Pour y répondre, on réalise le programme Python ci-contre :

- a. Expliquer ce que représentent les variables r, s , u et v dans le programme.

- b. Le programme affiche les valeurs suivantes : 10.062252 20.315494 Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?

```
import math as m
import random as rd
def autobus():
    a, b, N = 0, 0, 10000
    for k in range(N):
        s = 0
        while s < 100:
            r = s
            s = s - 10 * m.log(1-rd.random())
        u, v = s - 100, s-r
        a, b = a+u, b+v
    return a/N, b/N
```