

Correction de la feuille Cours\_10.2 : Sommes de deux variables à densité. Produit de convolution.

**Ex 1 :** Soit  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathbb{1}_{t>0} \mathbb{1}_{t<x} dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathbb{1}_{0<t<x} dt \end{aligned}$$

donc

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x-t) dt = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x) \cdot \int_0^x f(t) dt$$

**Ex 2 :** 1) Avec  $x$  un réel fixé, en faisant le changement de variable affine  $u = x - t$  on obtient :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) dt = \int_{+\infty}^{-\infty} \mathbb{1}_{[c,d]}(x-u) \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(u) (-du)$$

donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[c,d]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[a,b]}(x-t) dt$$

2) Pour  $x$  et  $t$  dans  $\mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) = 1 &\iff c \leq x-t \leq d \\ &\iff c-x \leq -t \leq d-x \\ &\iff x-d \leq t \leq x-c \\ &\iff \mathbb{1}_{[x-d, x-c]}(t) = 1 \end{aligned}$$

sachant que les indicatrices ne prennent pour valeurs que 0 et 1 on a bien :

$$\mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) = \mathbb{1}_{[x-d, x-c]}(t)$$

3) La formule précédente donne :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[c,d]}(x-t) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[x-d, x-c]}(t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[a,b] \cap [x-d, x-c]}(t) dt \end{aligned}$$

En notant  $I_x = [x-d, x-c] \cap [a, b]$ , cette intégrale est l'amplitude de  $I_x$ .

| $x$          | $-\infty$   | $a+c$      | $b+c$    | $a+d$      | $b+d$       | $+\infty$ |
|--------------|-------------|------------|----------|------------|-------------|-----------|
| $I_x$        | $\emptyset$ | $[a, x-c]$ | $[a, b]$ | $[x-d, b]$ | $\emptyset$ |           |
| $\varphi(x)$ | 0           | $x-a-c$    | $b-a$    | $b+d-x$    | 0           |           |

4) (Courbe de  $\varphi$  faite au tableau)5) On fixe  $x \in \mathbb{R}$ ,Pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} t \in I_x &\iff t \in [x-d, x-c] \cap [a, b] \\ &\iff x-d \leq t \leq x-c \quad \text{et} \quad a \leq t \leq b \\ &\iff \max(a, x-d) \leq t \leq \min(b, x-c) \end{aligned}$$

donc  $I_x = \emptyset$  si  $\min(b, x-c) - \max(a, x-d) < 0$  et  $I_x = [\max(a, x-d); \min(b, x-c)]$  sinon  
et comme  $\varphi(x)$  est l'amplitude de  $I_x$  il vient bien

$$\varphi(x) = \max(0; \min(b, x-c) - \max(a, x-d))$$

**Ex 3 :** 1)

$$\begin{aligned}
 f_1(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[x-1, x+1]}(t) \, dt \\
 &= \int_{x-1}^{x+1} 1 \, dt \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = 2}$$

2)

$$\begin{aligned}
 f_2(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[-1, 1]}(x-t) \, dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[-1, 1]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[x-1, x+1]}(t) \, dt \quad \text{En effet : } -1 \leq x-t \leq 1 \iff x-1 \leq t \leq x+1
 \end{aligned}$$

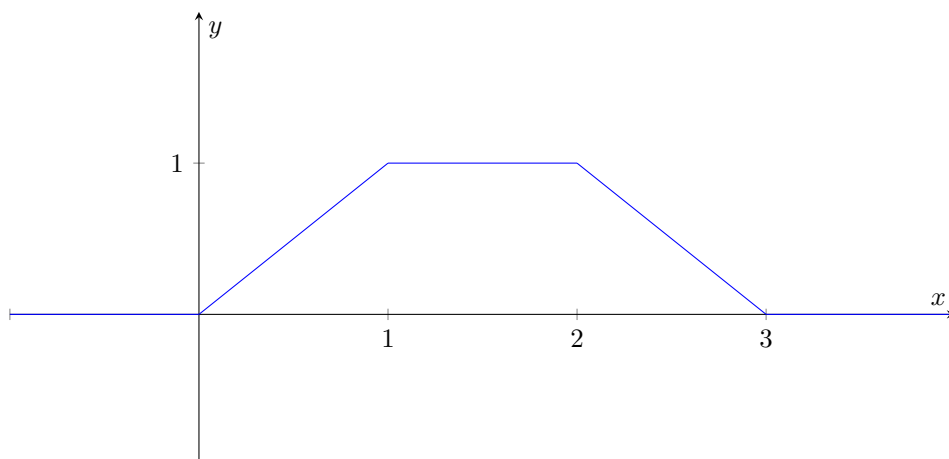
(Cela revient à calculer l'amplitude de l'intervalle  $I_x = [x-1, x+1] \cap [-1, 1]$ )

| $x$      | $-\infty$   | $-2$        | $0$        | $2$         | $+\infty$ |
|----------|-------------|-------------|------------|-------------|-----------|
| $I_x$    | $\emptyset$ | $[-1, x+1]$ | $[x-1, 1]$ | $\emptyset$ |           |
| $f_2(x)$ | $0$         | $x+2$       | $2-x$      | $0$         |           |

3)

$$\begin{aligned}
 f_3(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0, 1]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[0, 2]}(x-t) \, dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0, 1]}(t) \cdot \mathbb{1}_{[x-2, x]}(t) \, dt \quad \text{En effet : } 0 \leq x-t \leq 2 \iff x-2 \leq t \leq x \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x 1 \, dt & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \int_0^1 1 \, dt & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ \int_{x-2}^1 1 \, dt & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 3-x & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ 0 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$



4)

$$\begin{aligned}
 f_4(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{0 \leq t} \cdot \mathbb{1}_{t \leq x} dt && \text{En effet : } 0 \leq x-t \iff t \leq x \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{0 \leq t \leq x} dt \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x 1 dt & \text{si } 0 < x \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

5)

$$\begin{aligned}
 f_5(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} t e^x \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \\
 &= e^x \int_{-\infty}^{+\infty} t \cdot \mathbb{1}_{0 \leq t \leq x} dt && \text{En effet : } 0 \leq x-t \iff t \leq x \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ e^x \int_0^x t dt & \text{si } 0 < x \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f_5(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} e^x & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

6)

$$\begin{aligned}
 f_6(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{2x-3t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt \\
 &= e^{2x} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-3t} \cdot \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(t) \mathbb{1}_{[x;+\infty[}(t) dt && \text{En effet : } x-t \leq 0 \iff x \leq t \\
 &= \begin{cases} e^{2x} \int_0^{+\infty} e^{-3t} dt & \text{si } x \leq 0 \\ e^{2x} \int_x^{+\infty} e^{-3t} dt & \text{si } 0 < x \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$f_6(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}}{3} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{e^{-x}}{3} & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

**Ex 4 :** 1)  $X$  et  $Y$  sont indépendantes et de même densité :  $f : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda e^{-\lambda t}$ .  
donc  $Z = X + Y$  est à densité, et une de ses densité est donnée par :

$$\begin{aligned}
 h : x &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) \lambda e^{-\lambda(x-t)} dt \\
 h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \\
 &= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x-t) dt \\
 &= \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{]-\infty; x]}(t) dt && \text{En effet : } 0 \leq x-t \iff t \leq x \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda^2 e^{-\lambda x} \int_0^x 1 dt & \text{si } 0 < x \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda^2 x e^{-\lambda x} & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad \text{est une densité de } X + Y$$

2) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F_Z(x) = \int_{-\infty}^x h(t) dt$ ,

donc pour  $x < 0$ ,  $F_Z(x) = 0$  et pour  $x \geq 0$   $F_Z(x) = \int_0^x \lambda^2 t e^{-\lambda t} dt$ ,

Et en faisant une intégration par parties on obtient :

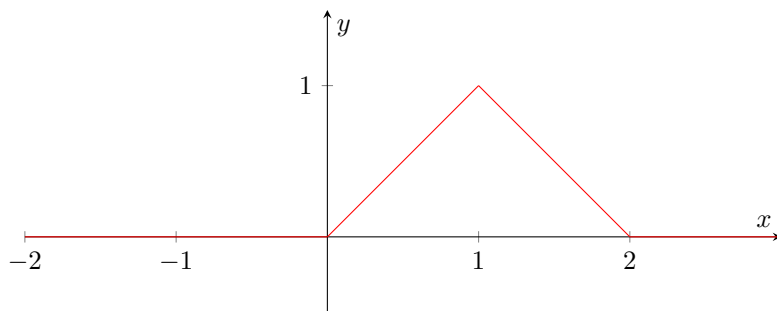
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} - \lambda x e^{-\lambda x} & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad \text{est la fonction de répartition de } Z$$

*Remarque : Il est conseillé de vérifier ce calcul en dérivant cette expression.*

**Ex 5 :** 1)  $X$  et  $X$  sont indépendantes et de même densité :  $f : t \mapsto \mathbb{1}_{[0,1]}(t)$ .  
donc  $Z = X + Y$  est à densité, et une de ses densité est donnée par :

$$\begin{aligned}
 h : x &\mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) f(x-t) dt \\
 h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \mathbb{1}_{[0,1]}(x-t) dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,1]}(t) \mathbb{1}_{[x-1, x]}(t) dt && \text{En effet : } 0 \leq x-t \leq 1 \iff x-1 \leq t \leq x \\
 &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \int_0^x 1 dt & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \int_{x-1}^1 1 dt & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}
 \end{aligned}$$

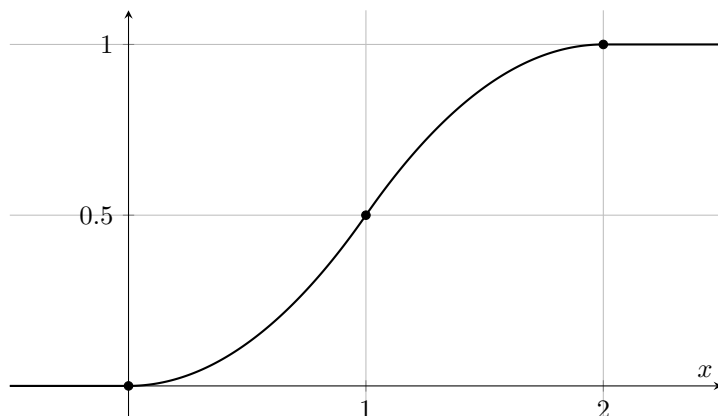
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{est une densité de } X + Y$$



2) On prend sur chaque intervalle la primitive qui donne  $F$  continue avec les bonnes limites en  $\infty$ .

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x - \frac{x^2}{2} - 1 & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases} \quad \text{est la fonction de répartition de } Z = X + Y$$

Courbe représentative de  $F_Z$



**Ex 6 :** 1) On redémontre un résultat du cours.

$X$  et  $Y$  sont de densité  $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$  et sont indépendantes donc  $X + Y$  de densité  $h$  définie par :

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-t)^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2 + xt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\frac{x}{2})^2 + \frac{x^2}{4}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{x^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\frac{x}{2})^2} dt \end{aligned}$$

or  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\frac{x}{2})^2} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(t-\frac{x}{2})^2}{2\sigma^2}} dt$  avec  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$  donc  $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-\frac{x}{2})^2} dt = \sigma\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi}$   
et ainsi

$$X + Y \text{ de densité : } h : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{4}}$$

2) On reconnaît la densité de la loi  $\mathcal{N}(0, 2)$ .

$$X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$$

**Ex 7 :** (*non corrigé*)