

Une table des valeurs prises par Φ est donnée en annexe.

X représente ici une variable aléatoire suivant une loi normale centrée réduite.

Ex 1 : Donner une valeur approchée des probabilités suivantes :

$$\underbrace{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \approx \dots\dots\dots}_{\text{(Calculatrice ou Python)}}$$

$$\underbrace{P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) \approx 0,6915}_{\text{(Table)}}$$

$$\underbrace{P(X \geq 1) \approx \dots\dots\dots}_{\text{(Calculatrice ou Python)}}$$

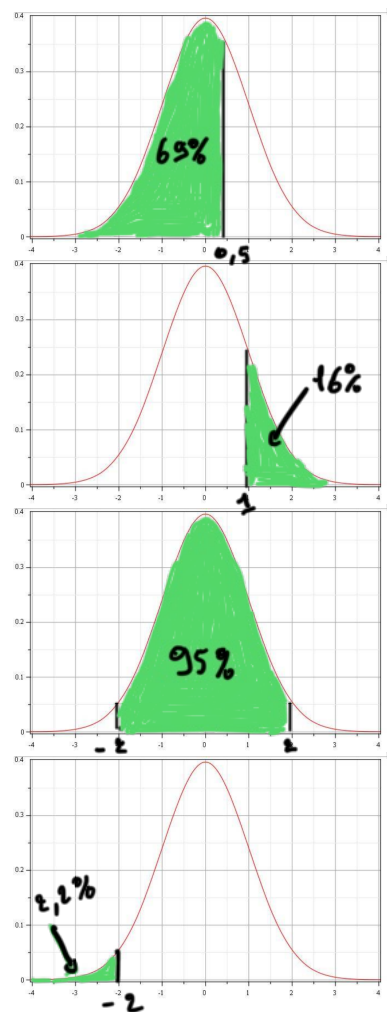
$$\underbrace{P(X \geq 1) \approx 1 - 0,8413}_{\text{(Table)}} = 0,1587$$

$$\underbrace{P(-2 \leq X \leq 2) \approx \dots\dots\dots}_{\text{(Calculatrice ou Python)}}$$

$$\underbrace{P(-2 \leq X \leq 2) \approx 2\Phi(2) - 1}_{\text{(Table)}} = 0,9544$$

$$\underbrace{P(X \leq -2) \approx \dots\dots\dots}_{\text{(Calculatrice ou Python)}}$$

$$\underbrace{P(X \leq -2) \approx 1 - \Phi(2)}_{\text{(Table)}} = 0,0228$$



Faire le même travail dans les cas suivants :

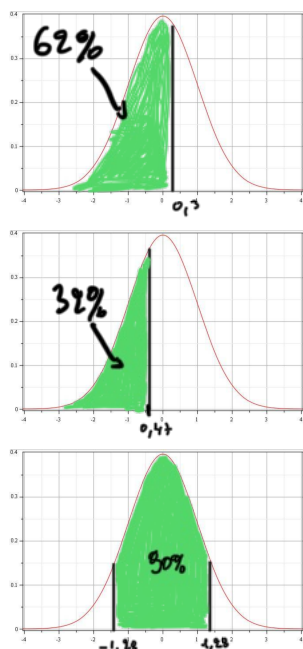
$$P(X < 1,25) \quad P(-1 \leq X \leq 1) \quad P(-1 \leq X \leq 2) \quad P\left(|X| \leq \frac{1}{2}\right) \quad P(X \leq -3) \quad P(-0,3 \leq X)$$

Ex 2 : Dans tous les cas suivants, déterminer une valeur approchée du réel a vérifiant :

$$P(X \leq a) = 0,62 \iff a = \Phi^{-1}(0,62) \approx 0,30$$

$$P(X \leq a) = 0,32 \iff a = \Phi^{-1}(0,32) \approx -0,47$$

$$P(-a \leq X \leq a) = 0,80 \iff a = \Phi^{-1}(0,9) \approx 1,28$$



Faire le même travail dans les cas suivants :

$$P(X \leq a) = 0,95 \qquad P(X \leq a) = 0,975 \qquad P(X > a) = 0,1$$

$$P(X \geq a) = 0,65 \qquad P(-1 \leq X \leq a) = 0,8 \qquad P(-a \leq X \leq a) = 0,95$$

Ex 3 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale d'espérance 12 et de variance 4, calculer une valeur approchée de la probabilité de chacun des événements suivants :

$$(X \leq 13) \qquad (11 \leq X \leq 14)$$

Ex 4 : X suit une loi $\mathcal{N}(18, 9)$ ($V(X) = 9$), calculer une valeur approchée de la probabilité de chacun des événements suivants :

$$(X \leq 21) \qquad (X \geq 16) \qquad (20 \leq X \leq 24) \qquad (14 \leq X \leq 17)$$

Ex 5 : X suit une loi $\mathcal{N}(2; 0,01)$ ($V(X) = 0,01$), déterminer une valeur approchée de a dans chacun des cas suivants :

$$P(X \leq a) = 0,9 \qquad P(X \geq a) = 0,1 \qquad P(X \geq a) = 0,75 \qquad P(2 - a \leq X \leq 2 + a) = 0,8$$

Ex 6 : On a étudié la glycémie d'une population d'individus, et on a constaté que :

- 20% des glycémies sont inférieures à 0,82 g/l.
- 30% des glycémies sont supérieures à 0,98 g/l.

Dans ces conditions, si on suppose que dans cette population la glycémie G (en g/l) des individus suit une loi normale, déterminer la moyenne et l'écart-type de la glycémie. (*On demande des valeurs approchées*)

Ex 7 : Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(8, 4)$ (4 est la variance de X); calculer

$$P(X < 7,5) \qquad P(X > 8,5) \qquad P(6,5 \leq X \leq 10) \qquad P_{X>5}(X > 6)$$

Ex 8 : Soit X une variable aléatoire gaussienne, déterminer $E(X)$ et $\sigma(X)$ sachant que :

$$P(X < -1) = 0,05 \quad \text{et} \quad P(X > 3) = 0,12$$

Ex 9 : (*Règle des trois sigmas*)

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ où $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$ et μ un réel quelconque.

Calculer, puis illustrer graphiquement :

$$\mathbb{P}(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \qquad \mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \qquad \mathbb{P}(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma)$$

Ex 10 : Une usine produit des fioles de laboratoire.

Le volume V (en mL) d'une fiole est modélisé par une loi normale

$$V \sim \mathcal{N}(100, 0,25) \quad (\text{donc } \sigma = 0,5).$$

On note Φ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

- 1) Calculer une valeur approchée de la probabilité qu'une fiole contienne moins de 99,5 mL.
- 2) L'usine accepte une fiole si son volume appartient à l'intervalle $[99 ; 101]$. Calculer une valeur approchée de la proportion de fioles acceptées.
- 3) On souhaite fixer une tolérance symétrique autour de 100 : on accepte une fiole si

$$100 - a \leq V \leq 100 + a.$$

Déterminer une valeur approchée de a pour que 95% des fioles soient acceptées.

Table des valeurs de Φ

Le tableau suivant donne pour des réels de $[0, 3]$, des valeurs approchées de $\Phi(x)$ à 10^{-4} près.

Si on numérote les lignes/colonnes comme avec Python c'est un tableau de 30 lignes et 10 colonnes.

Dans la case (i, j) , il y a une valeur approchée de $\Phi\left(\frac{i}{10} + \frac{j}{100}\right)$

Par exemple : à la ligne 19 et la colonne 6 il y a : $\Phi(1, 96)$

	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986

Remarques :

- Pour obtenir les valeurs de $\Phi(x)$ lorsque $x \in [-3, 0]$, on utilise la relation $\Phi(x) = 1 - \Phi(-x)$.
- Quand $\alpha \in]0, 5; 1[$, pour obtenir un encadrement de u_α tel que $\Phi(u_\alpha) = \alpha$, on cherche dans le tableau a et b tels que :

$$\Phi(a) \leq \alpha \leq \Phi(b)$$

ce qui permet d'en déduire que $u_\alpha \in [a, b]$ (car Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$).

- Quand $\alpha \in]0; 0, 5[$, pour obtenir un encadrement de u_α tel que $\Phi(u_\alpha) = \alpha$, il suffit de se ramener au cas précédent en utilisant :

$$u_\alpha = -u_{1-\alpha}$$