

Feuille Cours.11 : Produit scalaire. Orthogonalité.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on notera E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On identifie dans ce chapitre les matrices 1×1 de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et les nombres réels.

Ex 1 : 1) Les familles suivantes sont-elles formées de vecteurs 2 à 2 orthogonaux ?

- | | |
|-------------------------------|--|
| a. $((1, 2, 1), (1, 0, -1))$ | c. $((1, 2, 1), (1, 0, -1), (2, -1, 0))$ |
| b. $((1, 2, 1), (2, -1, -1))$ | d. $((1, 2, 1), (1, 0, -1), (1, -1, 1))$ |

2) Les familles suivantes sont-elles de vecteurs 2 à 2 orthogonaux ? formées de vecteurs de norme 1 ?

- | | |
|--|---|
| a. $((1, 0, 1), (-1, 0, 1))$ | c. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0)\right)$ |
| b. $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), (0, 1, 0)\right)$ | d. $\left(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)\right)$ |

Ex 2 : Dans $\mathbb{R}^3$,

- 1) On note F l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $u = (1, 2, 1)$.
Montrer que F est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base.
- 2) On note G l'ensemble des vecteurs orthogonaux à $u = (1, 0, 1)$ et à $v = (0, 1, 0)$.
Montrer que G est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ dont on déterminera une base.

Ex 3 : Normer les vecteurs suivants : (c'est à dire déterminer un vecteur colinéaire à x et de norme 1)

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $u = (1, 0, 1)$ | 5) $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$ |
| 2) $u = (1, 1, 1, 1)$ | 6) $u = \frac{5}{\sqrt{3}}(2, 1, 0, -1)$ |
| 3) $u = (-1, 2, 1)$ | 7) $u = (a, b, c, d)$ |
| 4) $u = \frac{1}{3}(1, 1, -1)$ | 8) $u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$ |

Ex 4 : Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$,

- 1) Rappeler la définition de $\ker(A)$.
- 2) Montrer que $\ker(A) = \ker(A^T A)$.

Ex 5 : 1) Montrer que pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$$

Dans quel cas a-t-on égalité

2) Montrer que pour tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq \|x\|$$

Ex 6 : Démontrer pour tout $(u, v) \in (\mathbb{R}^n)^2$ que

$$||u|| - ||v|| \leq ||u - v||$$

Ex 7 : Soit $u_1, \dots, u_n$ des vecteurs non nuls et 2 à 2 orthogonaux.

Montrer que $(u_1, \dots, u_n)$ est une famille libre.

Ex 8 : Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et $y = (1, 1, 1)$. On pose

$$z = x - \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}(1, 1, 1).$$

- 1) Montrer que z est orthogonal à y .
- 2) En déduire que

$$\|x\|^2 = \left\| \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}(1, 1, 1) \right\|^2 + \|z\|^2.$$

Ex 9 : On se place dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire usuel.
On considère le vecteur

$$u = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

et un vecteur quelconque

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $x - \lambda u \perp u$.