

Correction de la feuille Exo_19 : Sommes de deux variables à densité. Produit de convolution.

Ex 1 : (Dans l'énoncé il manque l'indépendance de C_A et C_B) $C_A \hookrightarrow \mathcal{N}(12, 2)$ donc (stabilité par transformation affine) $-C_A \hookrightarrow \mathcal{N}(-12, 2)$ de plus $C_B \hookrightarrow \mathcal{N}(14, 1)$ et $-C_A$ et C_B sont indépendantesdonc (somme de deux lois normales) $C_B - C_A \hookrightarrow \mathcal{N}(2, 3)$ on note $X = C_B - C_A$

$$\begin{aligned}
P(C_A \leq C_B) &= P(C_B - C_A \geq 0) \\
&= P(X \geq 0) \\
&= 1 - P(X \leq 0) \\
&= 1 - P\left(X^* \leq \frac{0-2}{\sqrt{3}}\right) \\
&= 1 - \Phi\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right) \approx 0,88
\end{aligned}$$

La probabilité que la concentration des bactéries A soit supérieure à celles des bactéries B est d'environ 88%**Ex 2 :** (non corrigé)**Ex 3 :** 1) X_2 est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ donc $Y = -X_2$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^-$ et pour $x \in \mathbb{R}_-$,

$$\begin{aligned}
F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\
&= P(-X_2 \leq x) \\
&= P(X_2 \geq -x) \\
&= 1 - F_{X_2}(-x) \\
&= e^{\lambda_2 x}
\end{aligned}$$

$$\text{donc } F_Y(x) = \begin{cases} e^{\lambda_2 x} & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

 F_Y est C^0 sur $\mathbb{R}$ tout entier et C^1 sur $\mathbb{R}$ sauf en 0 donc Y est de densité : $t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) \lambda e^{\lambda_2 t}$ 2) X_1 et Y sont indépendantes, X_1 a pour densité $f : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t}$ et Y a pour densité $g : t \mapsto \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(t) \lambda_2 e^{\lambda_2 t}$ donc $X_1 - X_2 = X_1 + Y$ est à densité, et une de ses densité est donnée par :

$$h : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(t) \lambda_1 e^{-\lambda_1 t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) \lambda_2 e^{\lambda_2 (x-t)} dt$$

$$\begin{aligned}
h(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} e^{-(\lambda_2 + \lambda_1)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_2 + \lambda_1)t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_-}(x-t) dt \\
&= \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_2 + \lambda_1)t} \mathbb{1}_{[x, +\infty[}(t) dt && \text{En effet : } x-t \leq 0 \iff x \leq t \\
&= \begin{cases} \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda_2 + \lambda_1)t} dt & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda_1 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} \int_x^{+\infty} e^{-(\lambda_2 + \lambda_1)t} dt & \text{si } 0 < x \end{cases}
\end{aligned}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{\lambda_2 x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} e^{-\lambda_1 x} & \text{si } 0 < x \end{cases} \quad \text{est une densité de } X_1 - X_2$$

3) Montrer que $P(X_1 < X_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$.

4) Deux guichets sont ouverts à la poste. Le temps d'attente du guichet A (resp. du guichet B) suit une loi exponentielle de moyenne 20mn (resp. 30mn).

Deux clients Lucien et Justin rentrent simultanément Lucien choisit le guichet A et Justin le guichet B .

- Donner les paramètres des deux lois exponentielles.
- En moyenne, après combien de temps voit-on sortir l'un des deux clients (*le premier*) ?
- En moyenne, après combien de temps voit-on sortir le deuxième ?
- Quelle est la probabilité que Lucien sorte avant Justin ?

Ex 4 : Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$. On note $Y = X^2$,

- Rappeler la loi de X et déterminer la loi de Y .
- Calculer si elles existent l'espérance et l'écart-type de Y .
- (Oral Agro)** On se place dans un repère orthonormé du plan. Un point M est choisi au hasard dans le rectangle $R = \left[-1, \frac{3}{2}\right] \times \left[-1, \frac{3}{2}\right]$, de telle sorte que (X_1, X_2) les coordonnées de M soient des variables aléatoires suivant la loi uniforme sur $\left[-1; \frac{3}{2}\right]$ et on définit $D = X_1^2 + X_2^2$, qui représente le carré de la distance du point M au point $O(0, 0)$.

Déterminer la probabilité que le point M soit situé à une distance strictement inférieure à 1 de l'origine.

Ex 5 : 1) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant toutes les deux la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

- Déterminer une densité de $Y = X_1 + X_2$.
- Déterminer la fonction de répartition de Y .

2) Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les $\mathcal{U}([0, 1])$ et $\mathcal{U}([0, 2])$.

- Déterminer une densité de $Y = X_1 + X_2$.
- Déterminer la fonction de répartition de Y .

Ex 6 : (*Inspiré d'un sujet d'oral : Exemple 4, 2021*)

Soient λ et $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([0, \theta])$ et Y une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ .

On suppose que X et Y sont indépendantes.

- Justifier que $Z = X + Y$ est une variable aléatoire et déterminer une de ses densités.
- Déterminer la fonction de répartition de Z .

Ex 7 : Soient n un entier naturel non nul et $X_1, X_2, \dots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On note $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $Y_n = \frac{S_n - n\lambda_2}{\sigma\sqrt{n}}$

- Déterminer l'espérance de S_n .
- Déterminer l'écart-type de S_n .
- Quelle est la loi de Y_n ?

Ex 8 : (*Classique*) Loi du Chi2 à deux degrés liberté.

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi normale centrée réduite.

- Déterminer la loi de X^2 .
- Soit x un réel strictement positif,

montrer que $\int_0^x \frac{1}{\sqrt{t(x-t)}} dt$ et $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

(on utilisera un changement de variable affine)

3) Montrer que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t(1-t)}} dt$ est convergente et la calculer.

(on utilisera le changement de variable $t = \cos^2(x)$)

4) Déterminer la loi de $X^2 + Y^2$, son espérance et sa variance.

Ex 9 : (Exemple de sujet d'oral 2024)

- 1) Soient $\lambda > 0$, $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$ et $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de VAR indépendantes, de même loi que X .
On définit la suite de variables aléatoires $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par : $S_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
a. À l'aide d'une récurrence, montrer que la fonction f_n définie ensuite est une densité de probabilité.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{\lambda e^{-\lambda t} (\lambda t)^{n-1}}{(n-1)!} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

- b. En utilisant la convolution et une récurrence, montrer que f_n est une densité de S_n pour tout $n \geq 1$.
2) On suppose qu'à un arrêt, les différences entre les horaires de passage successifs d'un bus sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre λ . On définit un instant $S_0 = 0$, puis on note S_1, S_2 , etc, les horaires de passage successifs des bus. On note alors, pour $t > 0$, N_t le nombre de bus passés à l'arrêt, entre l'instant 0 et l'instant t . Autrement dit : $\forall n \geq 0, [N_t = n] = [S_n \leq t < S_{n+1}]$.
a. Pour $n \geq 0$, exprimer (avec soin) l'événement $[N_t \geq n]$ à l'aide de S_n .
b. Justifier alors que : $\forall n \geq 0, P(N_t = n) = P(S_n \leq t) - P(S_{n+1} \leq t)$.
c. En déduire que N_t suit une loi de Poisson de paramètre λt .
3) On suppose plus précisément que les horaires de passages successifs d'un bus sont, en moyenne, de 10 minutes. Un individu arrive à l'arrêt à l'instant $T = 100$ min pour prendre le bus.
On se pose alors les deux questions suivantes : - Combien de temps en moyenne va-t-il attendre le prochain bus ? - Combien de temps en moyenne s'écoule-t-il entre le prochain bus et le bus qui a précédé ? Pour y répondre, on réalise le programme Python ci-contre :

- a. Expliquer ce que représentent les variables r, s, u et v dans le programme.
- ```
import math as m
import random as rd
def autobus():
 a, b, N = 0, 0, 10000
 for k in range(N):
 s = 0
 while s < 100:
 r = s
 s = s - 10 * m.log(1-rd.random())
 u, v = s - 100, s-r
 a, b = a+u, b+v
 return a/N, b/N
```
- b. Le programme affiche les valeurs suivantes : 10.062252 20.315494 Pourquoi les valeurs affichées sont-elles paradoxales vis à vis de la situation ?