

La colle commencera par une question de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

• **Variables aléatoires réelles à densité.**

Définition d'une densité de probabilité. Définition d'une variable aléatoire réelle à densité.

Caractérisation des variables à densité (*CNS permettant de dire qu'une variable aléatoire est à densité*).

Savoir passer d'une densité à la fonction de répartition ou de la fonction répartition à une densité.

Dans ce contexte, pour répondre à "Donner la loi de X " :

- ① on détermine la fonction de répartition de X .
- ② on justifie (*si c'est le cas*) que X est une variable aléatoire à densité.
- ③ on détermine une densité de X .

Sur des exemples simples, recherche de la loi de $u(X)$, X ayant une densité donnée.

Loi du maximum ou du minimum de variables aléatoires indépendantes.

Espérance d'une variable à densité, propriétés. Théorème de transfert. Variance, écart-type.

Lois usuelles à densité :

Loi uniforme sur $[a, b]$. Densité. Fonction de répartition, espérance, variance, écart-type, simulation.

Stabilité de l'ensemble des lois uniformes par transformation affine.

Loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda \in]0; +\infty[$).

Densité. Fonction de répartition, espérance, variance, écart-type.

Loi sans mémoire. (*à savoir redémontrer*)

Simulation de la loi exponentielle.

Loi normale centrée réduite. Densité, allure des courbes. Propriété de la fonction de répartition. (notée Φ)

Fonction des quantiles (*réci-proque* de Φ). Notée $\alpha \mapsto u_\alpha$.

(*cette notation n'est plus indiquée dans le programme*).

Lecture d'une table donnant les valeurs de Φ sur $[0, 3]$ et/ou utilisation de la calculatrice et/ou Python.
(*Savoir trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ pour $x \in [-3, 3]$ et un encadrement de u_α pour $\alpha \in]0, 1[$).*)

Loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 , on note $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Stabilité de l'ensemble des lois normales par transformation affine.

En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$.

Loi de la somme de deux de variables aléatoires indépendantes à densité. (*Produit de convolution*)

(*On rappelle la formule si nécessaire*)

Somme (combinaison linéaire) de gaussiennes indépendantes.

Pas encore les inégalités et les théorèmes limites.

• **Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.**

Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Ecriture matricielle. Bilinéarité.

Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Cas d'égalité.

Vecteurs orthogonaux. de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Théorème de Pythagore. (*Enoncés et démonstrations*)

• **Informatique.**

Fonction de calcul de la moyenne et l'écart-type d'une série statistique.

Fonction qui renvoie le tableau de valeurs des fréquences cumulées d'une série statistique.

Simulation de la réalisation d'une variable aléatoire X suivant une loi usuelle discrète ou continue.

Avec une longue série de simulations :

- Estimation d'une probabilité. (*fréquence des réalisations*)
- Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire (*moyenne arithmétique des réalisations*)
- Estimation de la fonction de répartition (*Courbe des fréquences cumulées*)