

Partie II MCR 2025

10. Lorsque n est impair, $X_{(\frac{n+1}{2})}$ est la médiane de l'échantillon $(X_1, \dots, X_n)$

11. Comme $X_1 \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1])$, X_1 admet espérance et variance : $E(X_1) = \frac{1}{2}, \quad V(X_1) = \frac{1}{12},$

et sa fonction de répartition est la fonction définie par pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$F_{X_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}.$$

12. $X_{(1)}$ est à valeurs dans $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_{X_{(1)}}(x) &= P(\min(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k > x)\right) \\ &= 1 - \prod_{k=1}^n P(X_k > x) \quad (\text{indépendance}) \\ &= 1 - (1 - x)^n \end{aligned}$$

$$F_{X_{(1)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - (1 - x)^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$X_{(n)}$ est à valeurs dans $[0, 1]$ et pour $x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} F_{X_{(n)}}(x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= P\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \leq x)\right) \\ &= \prod_{k=1}^n P(X_k \leq x) \quad (\text{indépendance}) \\ &= x^n \end{aligned}$$

$$F_{X_{(n)}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x^n & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

13. (a) En posant $a = i$, $b = j$ et $c = n - i - j$ et $y = x + h$, la probabilité recherchée ici est $p_{i,j,n-i-j}(x, x + h)$

donc la probabilité recherchée ici est :
$$\frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i \cdot h^j \cdot (1 - x - h)^{n-i-j}$$

(b) **Redaction 1.**

$$F_{X_{(k)}}(x + h) - F_{X_{(k)}}(x) = P(x < X_{(k)} \leq x + h)$$

On note A le nombre de X_i dans $[0, x]$ et B le nombre de X_i dans $]x, x + h]$.

$((A = i) \cap (B = j))_{(i,j) \in [0,n]^2}$ est un système complet d'événements donc :

$$P(x < X_{(k)} \leq x + h) = \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n P((A = i) \cap (B = j) \cap (x < X_{(k)} \leq x + h))$$

En supprimant les termes nuls il vient :

$$\begin{aligned} P(x < X_{(k)} \leq x + h) &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k-i}^{n-i} P((A=i) \cap (B=j) \cap (x < X_{(k)} \leq x + h)) \\ &= \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k-i}^{n-i} P((A=i) \cap (B=j)) \end{aligned}$$

or $P((A=i) \cap (B=j))$ est la probabilité obtenue à la question 13 (a), donc

$$F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k-i}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i h^j (1-x-h)^{n-i-j}.$$

Redaction 2.

$$F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = P(x < X_{(k)} \leq x + h)$$

On note A le nombre de X_i dans $[0, x]$ et B le nombre de X_i dans $]x, x + h]$.

En notant $D_k = \{ (i, j) \in \llbracket 0; n \rrbracket^2 \mid 0 \leq i < k \text{ et } k \leq i + j \leq n \}$

$$(x < X_{(k)} \leq x + h) = \bigcup_{(i,j) \in D_k} (A=i) \cap (B=j)$$

En effet : $x < X_{(k)} \leq x + h$ revient à $A < k$ (le k ème est $> x$) et $k \leq A + B$ (le k ème est $\leq x + h$)

et comme cette réunion est formée d'événements deux à deux disjoints il vient :

$$P(x < X_{(k)} \leq x + h) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k-i}^{n-i} P((A=i) \cap (B=j))$$

or $P((A=i) \cap (B=j))$ est la probabilité obtenue à la question 13 (a), donc

$$F_{X_{(k)}}(x+h) - F_{X_{(k)}}(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k-i}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i h^j (1-x-h)^{n-i-j}.$$

(c) Pour $t > 0$, on a $\frac{1}{t} (F_{X_{(k)}}(x+t) - F_{X_{(k)}}(x)) = \sum_{i=0}^{k-1} \sum_{j=k-i}^{n-i} \frac{n!}{i!j!(n-i-j)!} x^i t^{j-1} (1-x-t)^{n-i-j}$

dans cette somme tous les termes sont proportionnels à : $x^i t^{j-1} (1-x-t)^{n-i-j}$ avec $j-1 \geq 0$ donc tous ces termes admettent une limite quand t tend vers 0^+ .

$$\text{la fonction } t \mapsto \frac{F_{X_{(k)}}(x+t) - F_{X_{(k)}}(x)}{t} \text{ a une limite à droite en zéro.}$$

14. Les espérances et les variances existent car les densités sont bornées et nulles en dehors de $[0, 1]$.

$$\begin{aligned} E(X_{(k)}) &= \int_0^1 n \binom{n-1}{k-1} x f_{k-1, n-k}(x) dx \\ &= \int_0^1 n \binom{n-1}{k-1} f_{k, n-k}(x) dx \\ &= n \binom{n-1}{k-1} I_{k, n-k} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{k!(n-k)!}{(n+1)!} \end{aligned}$$

$$E(X_{(k)}) = \frac{k}{n+1}$$

Le théorème de transfert donne :

$$\begin{aligned}
E(X_{(k)}^2) &= \int_0^1 n \binom{n-1}{k-1} x^2 f_{k-1, n-k}(x) dx \\
&= \int_0^1 n \binom{n-1}{k-1} f_{k+1, n-k}(x) dx \\
&= n \binom{n-1}{k-1} I_{k+1, n-k} \\
&= \frac{n(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \cdot \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)!} \\
&= \frac{k(k+1)}{(n+1)(n+2)}
\end{aligned}$$

Puis en utilisant la formule de Koenig-Huyghens il vient :

$$V(X_{(k)}) = \frac{k(n+1-k)}{(n+1)^2(n+2)}$$

Problème 1 (MCR 2024)

1. (a) Soit $j \in \llbracket 0, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\binom{p+1}{j+1} \cdot \frac{1}{p+1} &= \frac{(p+1)!}{(j+1)!(p-j)!} \cdot \frac{1}{p+1} \\
&= \frac{(p+1) \cdot p!}{(j+1) \cdot j! (p-j)!} \cdot \frac{1}{p+1} \\
&= \frac{1}{j+1} \cdot \binom{p}{j}
\end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } j \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad \binom{p}{j} \cdot \frac{1}{j+1} = \binom{p+1}{j+1} \cdot \frac{1}{p+1}$$

(b) Soit $j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
\binom{p}{j+1} + \binom{p}{j} &= \frac{p!}{(j+1)! (p-j-1)!} + \frac{p!}{j! (p-j)!} \\
&= \frac{p! (p-j)}{(j+1)! (p-j)!} + \frac{p! (j+1)}{(j+1)! (p-j)!} \\
&= \frac{p! (p+1)}{(j+1)! (p-j)!} \\
&= \binom{p+1}{j+1}
\end{aligned}$$

$$\text{Pour tout } j \in \llbracket 0, p-1 \rrbracket, \quad \binom{p+1}{j+1} = \binom{p}{j+1} + \binom{p}{j}$$

2. $t \mapsto \lambda e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est une densité de X $x \mapsto (1 - e^{-\lambda t}) \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(t)$ est la fonction de répartition de X .

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$$

3. (a) Pour $i \geq 2$

$$t \mapsto \frac{1}{t} \text{ est continue et décroissante sur } [i-1; i+1] \text{ donc } \int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{t} dt$$

En effet :

$$\text{d'une part : } \forall t \in [i-1, i], \quad \frac{1}{i} \leq \frac{1}{t} \quad \text{donc} \quad \frac{1}{i} \leq \int_{i-1}^i \frac{1}{t} dt,$$

$$\text{d'autre part : } \forall t \in [i, i+1], \quad \frac{1}{t} \leq \frac{1}{i} \quad \text{donc} \quad \int_i^{i+1} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{i}$$

(b) Pour $n \geq 2$, $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = 1 + \frac{1}{\ln(n)} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$
 or $\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ donc $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$

$$\boxed{\ln(n+1) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

(c) On note $A_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

En sommant la relation de la question 3 (a) pour i allant de 2 à un entier $n \geq 2$, et en utilisant la relation de Chasles on obtient :

$$\int_2^{n+1} \frac{1}{t} dt \leq \sum_{i=2}^n \frac{1}{i} \leq \int_1^n \frac{1}{t} dt$$

On en déduit :

$$\ln(n+1) - \ln(2) \leq A_n - 1 \leq \ln(n)$$

Ce qui nous donne l'encadrement :

$$\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} - \frac{\ln(2)+1}{\ln(n)} \leq \frac{A_n}{\ln(n)} \leq 1 + \frac{1}{\ln(n)}$$

donc (théorème des gendarmes) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{A_n}{\ln(n)} = 1$, ou encore :

$$\boxed{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \ln(n)}$$

4. Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{(1)} \leq x) &= 1 - P(\min(X_1, \dots, X_n) > x) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i > x)\right) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n P(X_i > x) \quad (\text{Indépendance des } X_i) \\ &= 1 - \prod_{i=1}^n e^{-\lambda x} \\ &= 1 - e^{-n\lambda x} \end{aligned}$$

de plus on a : $\forall x < 0, P(X_{(1)} \leq x) = 0$ On reconnaît la fonction de répartition de la loi $\mathcal{E}(n\lambda)$

$$\boxed{X_{(1)} \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } n\lambda}$$

5. $X_{(n)}$ est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ et Pour $x \geq 0$,

$$\begin{aligned} P(X_{(n)} \leq x) &= P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) \\ &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i \leq x)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i \leq x) \quad (\text{Indépendance des } X_i) \\ &= \prod_{i=1}^n (1 - e^{-\lambda x}) \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^n \end{aligned}$$

La fonction de répartition de $X_{(n)}$ est donc la fonction $x \mapsto (1 - e^{-\lambda x})^n \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sauf en 0 donc $X_{(n)}$ est une variable aléatoire à densité et en dérivant sur $] -\infty, 0[$ et sur $]0; +\infty[$ on obtient une densité de $X_{(n)}$:

$$x \mapsto n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$$

6. on note f la fonction précédente,

$X_{(n)}$ admet une espérance si, et seulement si, $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ est absolument convergente

ou encore si, et seulement si, $\int_0^{+\infty} x n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$ est convergente ;

(en effet f est nulle sur $] -\infty; 0[$)

et alors on aura : $E(X_{(n)}) = \int_0^{+\infty} x n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx$

Soit $A > 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^A x n\lambda e^{-\lambda x} (1 - e^{-\lambda x})^{n-1} dx &= \int_0^A x n\lambda e^{-\lambda x} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j e^{-\lambda j x} dx \\ &= n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^A x e^{-\lambda(j+1)x} dx \end{aligned}$$

or quel que soit j , $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda(j+1)x} dx$ converge (Espérance d'une loi exponentielle)

donc

$$X_{(n)} \text{ admet une espérance et } E(X_{(n)}) = n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (-1)^j \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda(j+1)x} dx$$

Connaissant l'espérance de la loi $\mathcal{E}(\lambda(j+1))$ on a : $\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda(j+1)x} dx = \frac{1}{\lambda^2(j+1)^2}$

donc

$$E(X_{(n)}) = n\lambda \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \frac{(-1)^j}{\lambda^2(j+1)^2}$$

ce qui donne avec la relation de la question 1)(a) :

$$E(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1}$$

7. (a) La formule du binôme donne : $\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = (1 + (-1))^{p+1}$ donc

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} (-1)^k = 0$$

(b) • Pour $p = 1$,

$$\sum_{j=0}^{1-1} \binom{1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \binom{1}{1} \frac{(-1)^0}{1} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^1 \frac{1}{k} = 1$$

La propriété est bien vérifiée pour $p = 1$

• Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} &= \frac{(-1)^p}{p+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \left(\binom{p}{j} + \binom{p}{j+1} \right) \frac{(-1)^j}{j+1} && \text{Formule de la question 1)(b)} \\
&= \sum_{j=0}^p \binom{p}{j} \frac{(-1)^j}{j+1} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} \\
&= \sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{p+1} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k} && \text{(Question 1)(a) et hypothèse de récurrence)} \\
&= \frac{1}{p+1} \sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} (-1)^{j+1} + \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}
\end{aligned}$$

or le résultat de la question 7(a) donne : $\sum_{j=1}^{p+1} \binom{p+1}{j} (-1)^{j+1} = 1$ et ainsi on a bien

$$\sum_{j=0}^p \binom{p+1}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^{p+1} \frac{1}{k}$$

En conclusion on a bien :

$$\text{pour tout } p \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p}{j+1} \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{k=1}^p \frac{1}{k}$$

8. Les deux questions précédentes donnent la relation : $E(X_{(n)}) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$,

et avec le résultat de la question 3)(c) il vient :

$$E(X_{(n)}) \sim \frac{\ln(n)}{\lambda}$$

9. On remarque que $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n)$ donc

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) \\
&= \frac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)
\end{aligned}$$

or le DL₂(0) de $\ln(1+x)$ est $\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ donne $-x + \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$

or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\frac{1}{2(n+1)^2} \sim \frac{1}{2n^2}$ donc :

$$u_{n+1} - u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}$$

Appliquons le théorème de convergence pour deux séries.

On a : $u_n - u_{n+1} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$, $\frac{1}{2n^2} \geq 0$ et $\sum \frac{1}{2n^2}$ converge donc $\sum (u_n - u_{n+1})$ est convergente.
ce qui entraîne :

$$\sum (u_{n+1} - u_n) \text{ est convergente}$$

10. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_1$ (somme télescopique)

or on vient de montrer que la série $\sum_{n \geq 1} (u_n - u_{n+1})$ est convergente donc

$$\text{la suite } (u_n) \text{ est convergente}$$

11. • f est continue sur $\mathbb{R}$ et est à valeurs positives ou nulles.

- Etudions l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ qui est impropre en $-\infty$ et $+\infty$.

On remarque que $F : x \mapsto \exp(-\lambda \exp(-x))$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$
de plus le théorème de composition des limites donne $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ converge et vaut 1.

En conclusion :

f est bien une densité de probabilité

12. X_1 est à valeurs dans $]0; +\infty[$, donc $Y = \ln(X_1)$ est à valeurs dans $\mathbb{R}$ et pour $y > 0$,

$$\begin{aligned} P(Y \leq y) &= P(-\ln(X_1) \leq y) \\ &= P(X_1 \geq e^{-y}) \\ &= P(X_1 > e^{-y}) \quad \text{car } X_1 \text{ est à densité} \\ &= \exp(-\lambda e^{-y}) \quad \text{car } X_1 \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda) \quad \text{et } e^{-y} > 0 \end{aligned}$$

La fonction de répartition de Y est C^1 sur $\mathbb{R}$ donc Y est à densité et en dérivant on obtient :

$f : y \mapsto \lambda e^{-y} \exp(-\lambda e^{-y})$ est une densité de Y .

$Y = \ln(X_1)$ suit la loi de Gumbel.

13. Soit $x \in \mathbb{R}$,

pour n assez grand, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$

$$\text{or} \quad n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n \times \frac{x}{n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} x \quad (\text{Raisonnement vrai même si } x = 0)$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} e^x$

14. On note $Z_n = X_{(n)} - \ln(n)$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ et n assez grand (*),

$$\begin{aligned} P(Z_n \leq x) &= P(X_{(n)} - \ln(n) \leq x) \\ &= P(X_{(n)} \leq \ln(n) + x) \\ &= (1 - e^{-(x + \ln(n))})^n \quad \text{d'après la question 5. et avec } x + \ln(n) > 0 \quad (*) \\ &= \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} \exp(-\exp(-x)) \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\longrightarrow} P(Y \leq x) \end{aligned}$$

donc $(X_{(n)} - \ln(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers Y qui suit une loi de Gumbel de paramètre 1