

Feuille Cours_11_3 : Diagonalisation et théorème spectral.

Ex 1 : Pour chaque matrice suivante :

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$M_6 = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

- 1) Justifier que M_k est diagonalisable.
- 2) Déterminer le spectre de M_k .
- 3) Déterminer une base des sous-espaces propres de M_k .
- 4) Diagonaliser M_k avec les bases trouvées en 3).
- 5) Déterminer une matrice inversible P telle que $P^{-1}M_kP$ est diagonale et $P^{-1} = P^\top$
(Autrement dit : Diagonaliser M_k dans une base orthonormale)

Ex 2 : Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

- 1) Justifier que f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.
- 2) Diagonaliser f dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Ex 3 : 1) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- a. Énoncer le théorème spectral.
- b. Montrer que si M est diagonalisable dans une base orthonormale alors M est symétrique.
- c. Énoncer la contraposée de l'implication précédente.

- 2) a. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Montrer que :

Si f est diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$ alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f)$ est symétrique.

- b. On note $\mathcal{B}$ la base $((1,0), (1,1))$ et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

f est-il diagonalisable dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^2$?

Indication : On pourra diagonaliser f .

Ex 4 : On note $M = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, la matrice M^n .

Indication :

$$\text{Sp}(M) = \left\{ -\frac{1}{12}, \frac{1}{4}, 1 \right\} \quad E_{-\frac{1}{12}}(M) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad E_{\frac{1}{4}}(M) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{et} \quad E_1(M) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ex 5 : On note M la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec que des 1. Diagonaliser M dans une base orthonormale.