

Feuille info_22 : Convergence en loi.

Le but de ce TD est multiple :

- Revoir les lois usuelles des cours sur les variables aléatoires discrètes et à densité.
- Consolider vos connaissances sur les représentations des fonctions.
- Visualiser des exemples de convergences en loi.
- Préparer la convergence en loi du théorème central limite.

On utilise les bibliothèques suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import random as rd
from math import *
from scipy.stats import norm
```

On obtient des fonctions de répartition et des densités :

```
f = norm.pdf          # Densité de la loi normale centrée réduite11;
Phi = norm.cdf         # C'est Phi la fonction de répartition de la loi normale centrée. réduite
```

Dans tout ce TD, Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

Concentrez-vous dans ce TD sur les **questions d'informatique "en rouge"**

Ex 1 : Représenter la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Ex 2 : Décrire en une ou deux phrases et une figure ce que fait le programme suivant :

(On pourra utiliser les éléments de ce programme donné en annexe)

```
from math import comb
import matplotlib.pyplot as plt

plt.close('all')

def tracer_F_discrete(Valeurs, Probabilités):
    """ Les Valeurs sont dans l'ordre strictement croissantes,
        Probabilités de même longueur"""
    n = len(Valeurs)
    V, P = Valeurs, Probabilités
    F = [ 0 for k in range(n+1) ]
    F[0] = P[0]
    plt.plot([V[0]-1, V[0], V[0]], [0, 0, P[0]], "k" )
    for k in range(n-1):
        F[k+1] = F[k] + P[k+1]
        plt.plot([V[k], V[k+1], V[k+1]], [F[k], F[k], F[k+1]], "k" )
    plt.plot([V[-1], V[-1] + 1], [1, 1], "k" )

plt.figure("Fonction de répartition d'une loi binomiale")
n = 30
p = 1/2
V = [ k for k in range(n+1)]
P = [comb(n, k)*p**k*(1-p)**(n-k) for k in range(n+1) ]
tracer_F_discrete(V, P)
plt.show()

plt.figure("Fonction de répartition d'une loi uniforme")
n = 10
V = [ k for k in range(1, n+1)]
P = [ 1/n for k in range(1, n+1) ]
tracer_F_discrete(V, P)
plt.show()
```

Ex 3 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{U}\left(\left\{\frac{k}{n} \mid k \in \llbracket 1; n \rrbracket\right\}\right)$

1) Démontrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{la fonction de répartition de } X_n \text{ est la fonction } F_n : \begin{cases} x \mapsto 0 & \text{si } x \leq 0 \\ x \mapsto \frac{\lfloor nx \rfloor}{n} & \text{si } x \in]0, 1[\\ x \mapsto 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

2) Représenter la fonction de répartition de X_n pour plusieurs valeurs de n (sur le même repère).

3) Démontrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une loi usuelle que l'on précisera.

Ex 4 : Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $(X_n)_{n \in \llbracket \lambda; +\infty \rrbracket}$ telle que pour tout $n \in \llbracket \lambda; +\infty \rrbracket$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

1) Montrer que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\text{la fonction de répartition de } \frac{X_n}{n} \text{ est la fonction } F_n : x \mapsto \left(1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{\lfloor nx \rfloor}\right) \mathbb{1}_{]0; +\infty[}(x)$$

2) Représenter la fonction de répartition de $\frac{X_n}{n}$ pour plusieurs valeurs de n (sur le même repère).

Indication : On pourra utiliser la fonction `np.floor` pour simplifier ce programme.

3) Montrer que $\left(\frac{X_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Ex 5 : Soient $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$

1) Représenter la fonction de répartition de X_n pour plusieurs valeurs de n (sur le même repère).

2) Démontrer que $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$.

Ex 6 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.

1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, rappeler la fonction de répartition de X_n .

2) Représenter la fonction de répartition de X_n pour plusieurs valeurs de n (sur le même repère).

3) En déduire que : (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

Ex 7 : Soit Y une variable aléatoire suivant loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$ et (Z_n) une suite de variables aléatoires telle que pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, Z_n suit la loi $\mathcal{N}\left(0, \frac{1}{n}\right)$, on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n = Y + Z_n$.

On suppose de plus que pour chaque n , Y et Z_n sont indépendantes.

1) Exprimer la fonction de répartition de Z_n en fonction de Φ la fonction de répartition de la loi centrée réduite.

2) En déduire que la fonction de répartition de X_n est $F_n : x \mapsto \frac{1}{2}\Phi(x\sqrt{n}) + \frac{1}{2}\Phi((x-1)\sqrt{n})$

3) Représenter F_n pour $n = 3, 10, 30, 100$.

4) Donner la fonction de répartition F de Y et préciser où elle est continue.

5) Déterminer la limite de la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ pour $x \in]-\infty; 0[$, pour $x \in]0; 1[$ et pour $x \in]1; +\infty[$.

6) Conclure que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Ex 8 : Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $X_1, X_2, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes et suivant toutes la loi $\mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$ et on note : $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$

1) Rappeler l'espérance et l'écart-type des variables X_k .

2) Calculer l'espérance et l'écart-type de M_n .

3) Montrer que la variable centrée réduite associée à M_n est $M_n^* = \sqrt{\frac{3n}{2}}(M_n - 1)$

4) a. Ecrire une fonction qui permet de simuler la réalisation de M_n^* pour un n passer en argument.

b. Avec une longue série de simulations ($N=10000$) représenter la courbe des fréquences cumulées de M_{10} .

c. Tracer dans le même repère la courbe de Φ .

5) Renouveler les questions précédentes pour d'autres valeurs de n . Quelle conjecture pouvez-vous faire ?

Ex 9 : Reprendre l'exercice précédent en remplaçant la loi $\mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$, par des lois usuelles de votre choix.

Quelle conjecture pouvez-vous faire ?