

Ex 1 : (Agro-véto 2024)

On se donne trois entiers naturels non nuls n, p et q .

- 1) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Justifier que $(AB)^T = B^T A^T$.
- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que si M est inversible, alors M^T aussi et que l'on a :

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T.$$

- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Prouver que le noyau de A est égal au noyau de $A^T A$.
Indication : on pourra étudier la quantité $X^T A^T A X$ lorsque $X \in \text{Ker}(A^T A)$.

- 4) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable.

- 5) Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ et une matrice $P \in GL_3(\mathbb{C})$ telles que $A^T A = P D P^{-1}$.

On fera en sorte que la première ligne de P ne soit constituée que de 1.

On considère pour toute la suite une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On suppose que les colonnes de A que l'on notera $C_1, C_2, \dots, C_p$ forment une famille libre.

- 6) Donner la définition de la liberté de la famille $(C_1, \dots, C_p)$ et en déduire que le noyau de A est réduit au vecteur nul, puis que la matrice $A^T A$ est inversible.
- 7) ...

Ex 2 : (G2E 2024)

On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles symétriques dont le spectre est inclus dans $\mathbb{R}_+$, autrement dit : $S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), A^T = A \text{ et } \text{sp}(A) \subset \mathbb{R}_+\}$.

- 1) Préciser, en justifiant, parmi les matrices ci-dessous lesquelles appartiennent à $S_2^+(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

- 2) On se place dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère l'ensemble $\mathcal{M}$ des matrices $M(a, b)$ qui s'écrivent comme ci-dessous :

$$\mathcal{M} = \{M(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\} \quad \text{où } M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}.$$

- a. Montrer que $\mathcal{M}$ est un sous-espace vectoriel engendré par une famille judicieusement choisie. Justifier que cette famille est libre et en déduire la dimension de $\mathcal{M}$.
- b. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer deux vecteurs propres de $M(a, b)$ sous la forme $(1, y, 1)$ (avec $y \in \mathbb{R}$) puis un troisième vecteur propre orthogonal aux deux précédents.
- c. En déduire un réel $r \geq 0$ et une matrice P inversible telle que $P^T = P^{-1}$ et :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad M(a, b) = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + br & 0 \\ 0 & 0 & a - br \end{pmatrix} P^T.$$

- d. Déterminer une condition nécessaire et suffisante simple portant sur a et b pour que $M(a, b)$ appartienne à $S_3^+(\mathbb{R})$.

Ex 3 : (G2E 2024)

Dans cet exercice, on se donne deux variables aléatoires X_1 et X_2 indépendantes suivant toutes les deux la même loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et on note φ une densité de X_1 et X_2 et Φ leur fonction de répartition.

On note par ailleurs $Y = \max(X_1, X_2)$ et $Z = \min(X_1, X_2)$.

- 1) Justifier avec les densités des lois normales que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

- 2) Soit $x \in \mathbb{R}$.

a. Expliciter $\varphi(x)$ et vérifier que $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.

b. Exprimer $\Phi(x)$ à l'aide de φ .

- 3) a. Expliciter les fonctions de répartition de Y et de Z à l'aide de Φ .

b. En déduire que Y et Z admettent des densités que l'on exprimera à l'aide de Φ et φ .

- 4) a. Démontrer que Y admet une espérance si, et seulement si, l'intégrale ci-dessous est convergente :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x)dx.$$

b. À l'aide d'une intégration par parties et de I (définie en partie A), calculer cette dernière intégrale.

c. En déduire que Y admet pour espérance :

$$E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}.$$

d. En justifiant que $Y + Z = X_1 + X_2$, en déduire également l'espérance de Z .

- 5) a. À l'aide d'une intégration par parties, démontrer que Y^2 admet une espérance égale à 1 .

b. En déduire que Y admet une variance que l'on déterminera.

- 6) a. À nouveau par intégration par parties, démontrer que Z^2 admet une espérance égale à 1 .

b. En déduire que Z admet une variance que l'on déterminera.

c. Y et Z sont-elles indépendantes ?