

Feuille Exo_21 : Variables à densité

Problème prévu pour une durée de deux heures sans calculatrice.

Dans tout le problème, σ désigne un réel strictement positif.

La partie A est consacrée à l'étude de trois fonctions, l'une d'entre elles étant une densité de probabilité. Cette dernière est une densité d'une variable aléatoire réelle construite dans la partie B en utilisant deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant la même loi normale. On démontre dans la partie C que cette variable aléatoire réelle admet des moments de tous ordres. Après avoir donné une expression de ces moments, et à l'aide de deux autres suites, on obtient dans la partie D un équivalent du coefficient binomial $\binom{2p}{p}$ lorsque p tend vers $+\infty$.

Les parties A, B, C et D sont largement indépendantes bien que la partie D utilise certains résultats (donnés dans l'énoncé) de la partie C.

Partie A : Étude de trois fonctions

On considère les trois fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^*$ par :

$$f_{\sigma}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x}{\sigma^2} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad g(x) = x e^{-x}, \quad h(x) = \frac{2}{ex}$$

$\mathcal{C}_{\sigma}$ désigne la courbe représentative de f_{σ} et $\mathcal{H}$ la courbe représentative de h .

1. Démontrer que f_{σ} est une fonction de densité.
2. (a) Démontrer que g admet un maximum que l'on déterminera.
- (b) En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{\sigma}(x) \leq h(x)$$

- (c) Étudier le cas d'égalité dans l'inégalité précédente puis montrer que pour tout $\sigma \in \mathbb{R}_+$, les courbes $\mathcal{C}_{\sigma}$ et $\mathcal{H}$ ont une tangente commune dont on donnera une équation cartésienne.

Partie B : Une nouvelle loi

1. Soit N_1 une variable aléatoire réelle suivant la loi normale de paramètres 0 et σ^2 . On note M la variable aléatoire réelle définie par :

$$M = N_1^2.$$

- (a) En notant F_{N_1} la fonction de répartition de N_1 , démontrer que M est une variable aléatoire réelle à densité dont la fonction de répartition est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_{N_1}(\sqrt{x}) - F_{N_1}(-\sqrt{x}) & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

- (b) En déduire une densité de M .

- (c) À l'aide du changement de variable $t = \frac{\lambda}{2}(1 + \sin \theta)$ (et en vérifiant avec soin les hypothèses du théorème utilisé) démontrer que :

$$\forall \lambda > 0, \quad \int_0^{\lambda} \frac{dt}{\sqrt{t(\lambda - t)}} = \pi$$

2. Soit N_2 une variable aléatoire réelle de même loi que N_1 et indépendante de cette dernière. On note S et Z les variables aléatoires réelles définies par :

$$S = M + N_2^2 \text{ et } Z = \sqrt{S}$$

On rappelle qu'une densité de la somme de deux variables aléatoires réelles indépendantes, chacune ayant pour densité f_X et f_Y est donnée par le produit de convolution :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_{X+Y}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t) f_Y(x-t) dt.$$

(a) Démontrer que S est une variable aléatoire réelle à densité dont une densité est donnée par la fonction :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_S(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{2\sigma^2}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

(b) En déduire que Z est une variable aléatoire à densité dont une densité est f_σ (cf. partie A).

Partie C : Suite des moments

On considère dorénavant que $\sigma = 1$. Soit Z une variable aléatoire réelle dont f_1 est une densité. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note u_k le nombre réel (s'il existe) :

$$u_k = \mathbf{E}(Z^k).$$

1. (a) Démontrer que $u_0 = 1$ puis, à l'aide d'intégrations par parties, que $u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ et $u_2 = 2$.

(b) En déduire que Z admet une espérance et une variance que l'on calculera.

2. (a) Démontrer que u_k existe pour tout $k \in \mathbb{N}$ en établissant la relation ci-dessous :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad u_{k+1} = (k+1)u_{k-1}.$$

(b) En déduire que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad u_{2p} = 2^p p! \quad \text{et} \quad u_{2p+1} = \frac{(2p+1)!}{2^p p!} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

(c) En déduire enfin que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad u_k u_{k+1} = (k+1)! \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

Partie D : Étude de deux autres suites et calculs d'équivalents

On considère enfin les suites définies par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \frac{k!}{u_k^2} \quad \text{et} \quad w_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^k(t) dt.$$

1. Donner un équivalent simple de $v_k v_{k+1}$ lorsque k tend vers $+\infty$.

2. (a) Établir une relation de récurrence liant, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, v_{k+1} et v_{k-1} .

(b) Calculer w_0, w_1 puis démontrer que la suite w vérifie la même relation de récurrence que v .

(c) En déduire que les suites v et w sont égales.

3. (a) Démontrer que la suite w est décroissante.

(b) En déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{k}{k+1} \leq \frac{v_{k+1}}{v_k} \leq 1.$$

(c) En déduire également que $v_{k+1} \underset{k \rightarrow +\infty}{\sim} v_k$ puis établir que :

$$\binom{2p}{p} \underset{p \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{4^p}{\sqrt{p\pi}}$$