

Correction de la feuille Cours_11.2 : Bases orthogonales. Bases orthonormales.

Ex 1 : Les familles suivantes sont-elles orthogonales ? (*Il y en a plus que dans la feuille*)

- | | |
|--|---|
| 1) $((1, 2, 1), (1, 0, -1))$ (OUI) | 7) $((1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, -1, 1))$ (OUI) |
| 2) $((1, 2, 1), (2, -1, -1))$ (NON) | 8) $((0, 2, 2), (-2, 1, -1), (2, 3, -1))$ (NON) |
| 3) $((1, 2), (2, -1))$ (OUI) | 9) $((1, -1, 0, 0), (1, 1, 1, 1), (0, 0, -1, 1), (1, 1, -1, -1))$ (OUI) |
| 4) $((1, 2), (1, 0))$ (NON) | 10) $((1, -1, 1, -1), (1, 1, 1, 1), (0, 0, -1, 1), (1, 1, -1, -1))$ (NON) |
| 5) $((1, 2, 1), (1, 0, -1), (2, -1, 0))$ | |
| 6) $((1, 2, 1), (1, 0, -1), (1, -1, 1))$ (OUI) | |

Ex 2 : Les familles suivantes sont-elles orthonormales ? (*Il y en a plus que dans la feuille*)

- | | |
|--|---|
| 1) $((1, 0, 0), (0, 0, -1))$ (OUI) | 7) $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{6}}(0, 0, -1, 1))$ (NON) |
| 2) $((1, 0, 1), (-1, 0, 1))$ (NON) | 8) $(\frac{1}{2\sqrt{2}}(0, 2, 2), \frac{1}{\sqrt{6}}(-2, 1, -1), \frac{1}{\sqrt{14}}(2, 3, -1))$ (NON) |
| 3) $((1, 2), (2, -1))$ (NON) | 9) $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0, 0), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1))$ (OUI) |
| 4) $(\frac{1}{\sqrt{5}}(1, 0, 2), (0, 1, 0))$ (OUI) | 10) $(\frac{1}{2}(1, -1, 1, -1), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, -1, 1), \frac{1}{2}(1, 1, -1, -1))$ (NON) |
| 5) $(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1, 0))$ (NON) | |
| 6) $(\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, 1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1), \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1))$ (OUI) | |

- Ex 3 :**
- 1) Les colonnes de M forment une famille orthonormale donc $M^T M = I_2$.
 - 2) Les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ donc $M^T M = I_3$.
 - 3) On remarque que les colonnes de M forment une base orthonormale de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ donc $D_n^T D_n = I_n$.

 D_n est inversible et donner $D_n^{-1} = D_n^T$

Ex 4 : On note $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$.

- 1) $F = \text{Vect}(\underbrace{(1, -1, 0), (1, 0, -1)}_{\text{libre}})$ donc $\dim(F) = 2$
- 2) En cherchant un vecteur vérifiant $x + y + z = 0$ et orthogonal $(1, -1, 0)$ on trouve $(1, 1, -2)$.

 $((1, -1, 0), (1, 1, -2))$ est une base orthogonale de F

- 3) En normant les vecteurs précédents on obtient :

 $(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2))$ est une base orthogonale de F

- Ex 5 :**
- 1) On remarque $((1, 2, 2), (0, -1, 1))$ est orthogonale donc

 $(\frac{1}{3}(1, 2, 2); \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1))$ est une base orthonormale de F

- 2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $v = u_2 - \alpha u_1$, (Remarque $F = \text{vect}(u_1, v)$)

$$\begin{aligned}
 u_1 \perp v &\iff \langle u_1; (u_2 - \alpha u_1) \rangle = 0 \\
 &\iff \langle u_1; u_2 \rangle - \alpha \langle u_1; u_1 \rangle = 0 \\
 &\iff \alpha = \frac{\langle u_1; u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} \quad \text{car } u_1 \neq 0_E \\
 &\iff \alpha = \frac{1}{2} \\
 &\iff v = (0, -1, 1) - \frac{1}{2}(1, -1, 0) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)
 \end{aligned}$$

donc $\left((1, -1, 0); \left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1 \right) \right)$ est une base orthogonale de F .

or $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1 \right) = \frac{1}{2}(-1, -1, 2)$ donc

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0); \frac{1}{\sqrt{6}}(-1, -1, 2) \right) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

3) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $v = u_2 - \alpha u_1$, (Remarque $F = \text{vect}(u_1, v)$)

$$\begin{aligned} u_1 \perp v &\iff \langle u_1; (u_2 - \alpha u_1) \rangle = 0 \\ &\iff \langle u_1; u_2 \rangle - \alpha \langle u_1; u_1 \rangle = 0 \\ &\iff \alpha = \frac{\langle u_1; u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} \quad \text{car } u_1 \neq 0_E \\ &\iff \alpha = \frac{3}{5} \\ &\iff v = (1, 2, 1) - \frac{3}{5}(2, 0, 1) = \left(-\frac{1}{5}, 2, \frac{2}{5} \right) \end{aligned}$$

donc $\left((2, 0, 1); \left(-\frac{1}{5}, 2, \frac{2}{5} \right) \right)$ est une base orthogonale de F .

or $\left(-\frac{1}{5}, 2, \frac{2}{5} \right) = \frac{1}{5}(-1, 10, 2)$ donc

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 0, 1); \frac{1}{\sqrt{105}}(-1, 10, 2) \right) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

Remarque : si vous voulez vérifier ce résultat (au brouillon) :

$$\langle (2, 0, 1); (-1, 10, 2) \rangle = \dots = 0 \quad \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 10 & 2 \end{pmatrix} = \dots = 2$$

4) Une autre rédaction dans cet exemple simple.

$$\begin{aligned} \text{Vect}(u_1, u_2) &= \text{Vect}((2, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}((1, 0, 0, 0), (0, 1, 1, 1)) \\ &= \text{Vect}\left((1, 0, 0, 0), \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1)\right) \end{aligned}$$

$$\left((1, 0, 0, 0); \frac{1}{\sqrt{3}}(0, 1, 1, 1) \right) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

5) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $v = u_2 - \alpha u_1$, (Remarque $F = \text{vect}(u_1, v)$)

$$\begin{aligned} u_1 \perp v &\iff \langle u_1; (u_2 - \alpha u_1) \rangle = 0 \\ &\iff \langle u_1; u_2 \rangle - \alpha \langle u_1; u_1 \rangle = 0 \\ &\iff \alpha = \frac{\langle u_1; u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} \quad \text{car } u_1 \neq 0_E \\ &\iff \alpha = \frac{1}{3} \\ &\iff v = (1, 1, 1, 1) - \frac{1}{3}(1, -1, 1, 0) = \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) \end{aligned}$$

donc $\left((1, -1, 1, 0); \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) \right)$ est une base orthogonale de F .

or $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1 \right) = \frac{1}{3}(2, 4, 2, 3)$ donc

$$\left(\frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1, 0); \frac{1}{\sqrt{33}}(2, 4, 2, 3) \right) \text{ est une base orthonormale de } F.$$

6) (On peut reprendre la base de la question précédente, mais voyons ce que donne la méthode)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $v = u_2 - \alpha u_1$, (Remarque $F = \text{vect}(u_1, v)$)

$$\begin{aligned}
 u_1 \perp v &\iff \langle u_1; (u_2 - \alpha u_1) \rangle = 0 \\
 &\iff \langle u_1; u_2 \rangle - \alpha \langle u_1; u_1 \rangle = 0 \\
 &\iff \alpha = \frac{\langle u_1; u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} \quad \text{car } u_1 \neq 0_E \\
 &\iff \alpha = \frac{1}{4} \\
 &\iff v = (1, -1, 1, 0) - \frac{1}{4}(1, 1, 1, 1) = \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)
 \end{aligned}$$

donc $\left((1, 1, 1, 1); \left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right)\right)$ est une base orthogonale de F .

or $\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}(3, -5, 3, -1)$ donc

$\left(\frac{1}{2}(1, 1, 1, 1); \frac{1}{2\sqrt{11}}(3, -5, 3, -1)\right)$ est une base orthonormale de F .

Ex 6 : 1) $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 3z = 0\} = \left\{\left(-\frac{3}{2}z, y, z\right) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\right\}$

$$F = \text{Vect} \langle (-3, 0, 2); (0, 1, 0) \rangle$$

on remarque de plus que $((-3, 0, 2); (0, 1, 0))$ est (une famille) orthogonale, donc

$\left(\frac{1}{\sqrt{13}}(-3, 0, 2); (0, 1, 0)\right)$ est une base orthonormale de F

2) $F = \{(2a + 3b, a, 2b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ donc $F = \text{Vect} \langle u_1; u_2 \rangle$, en notant $u_1 = (2, 1, 0)$ et $u_2 = (3, 0, 2)$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $v = u_2 - \alpha u_1$, (Remarque $F = \text{vect}(u_1, v)$)

$$\begin{aligned}
 u_1 \perp v &\iff \langle u_1; (u_2 - \alpha u_1) \rangle = 0 \\
 &\iff \langle u_1; u_2 \rangle - \alpha \langle u_1; u_1 \rangle = 0 \\
 &\iff \alpha = \frac{\langle u_1; u_2 \rangle}{\|u_1\|^2} \quad \text{car } u_1 \neq 0_E \\
 &\iff \alpha = \frac{6}{5} \\
 &\iff v = (3, 0, 2) - \frac{6}{5}(2, 1, 0) = \left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 2\right)
 \end{aligned}$$

donc $\left((2, 1, 0); \left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 2\right)\right)$ est une base orthogonale de F .

or $\left(\frac{3}{5}, -\frac{6}{5}, 2\right) = \frac{1}{5}(3, -6, 10)$ donc

$\left(\frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1, 0); \frac{1}{\sqrt{145}}(3, -6, 10)\right)$ est une base orthonormale de F .

3) Ici on peut aller vite si on maîtrise

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0\},$$

$((1, -1, 0), (0, 0, 1))$ est une base orthogonale de F (facile à vérifier) donc

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0); (0, 0, 1)\right)$ est une base orthonormale de F