

Correction de la feuille Cours_11_3 : Diagonalisation et théorème spectral.

Ex 1 : Faisons l'étude complète pour $M = M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Exercice fait par Mathis au tableau.

1) M est réelle symétrique donc M est diagonalisable.

2) • M est de rang 1 donc 0 est une valeur propre de M et $\dim(E_0(M)) = 2$ (*théorème du rang*)

• On remarque que $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc 3 est une valeur propre de M et $\dim(E_3(M)) \geq 1$

de plus M est une matrice 3×3 donc il n'y a pas d'autre valeur propre (*et* $\dim(E_3(M)) = 1$) et

$$\text{Sp}(M) = \{0; 3\}$$

3) • $\dim(E_0(M)) = 2$ et $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une famille libre de deux vecteurs de $E_0(M)$ donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_0(M)$$

• $\dim(E_3(M)) = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur non nul de $E_3(M)$ donc

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_3(M)$$

4) L'étude précédente montre que : (*juxtaposition des bases des* $E_\lambda(f)$) :

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propre de M ,

Donc en posant $Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ on a : $\underbrace{Q \text{ inversible}}_{\text{c'est une base}}$ et $M = Q \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{de vecteurs propres de } M} Q^{-1}$

5) Déterminons une base orthonormée de chaque sous-espace propre.

• $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $E_3(M)$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormée de $E_3(M)$

• En notant $(u, v) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$$\begin{aligned} E_0(M) &= \text{Vect}(u, v) \\ &= \text{Vect}(u, v - \alpha u) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 u \perp v - \alpha u &\iff \langle u \mid v - \alpha u \rangle \\
 &\iff \langle u \mid v \rangle - \alpha \langle u \mid u \rangle = 0 \\
 &\iff \alpha = \frac{\langle u \mid v \rangle}{\|u\|^2} \\
 &\iff \alpha = -\frac{1}{2} \\
 &\iff v - \alpha u = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &\iff v - \alpha u = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

donc $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale de $E_0(M)$

et ainsi $\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormale de $E_0(M)$

En juxtaposant les bases on obtient :

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormale (de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée) de vecteurs propres de M .

Autrement dit : en posant $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ on a :
 $\underbrace{P \text{ inversible et } P^{-1} = P^T}_{\text{c'est une base orthonormale}} \text{ et } M = P \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M}$

Pour les autres je ne fais pas les premières questions :

• Matrice M_1 . (Fait par Lucas au tableau)

$\text{Sp}(M_1) = \{-1, 0, 2\}$ $E_{-1}(M_1) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ $E_0(M_1) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$ et $E_2(M_1) = \text{vect} \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formées de vecteurs propre de M ,

Donc en posant $Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a :
 $\underbrace{Q \text{ inversible}}_{\text{c'est une base}} \text{ et } M = Q \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M}$

On (remarque/sait) que $\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthogonale donc

$\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de M_1 .

Ainsi en posant $P = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$ on a :

$\underbrace{P \text{ inversible et } P^{-1} = P^\top}_{\text{c'est une base orthonormale}} \text{ et } M_3 = P \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} P^{-1}}_{\text{de vecteurs propres de } M_3}$

- Pour M_4 . (*Juste la réponse*) *Exercice fait par Nokomie au tableau.*

En posant $P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = P^\top$ et $M_4 = P \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} P^{-1}$

- Pour M_5 . (*Juste la réponse*)

En posant $P = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{\sqrt{5}}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = P^\top$ et $M_5 = P \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$

- Pour M_6 . (*Juste la réponse*)

En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ on a $P^{-1} = P^\top$ et $M_6 = P \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$

La suite n'est pas corrigée.