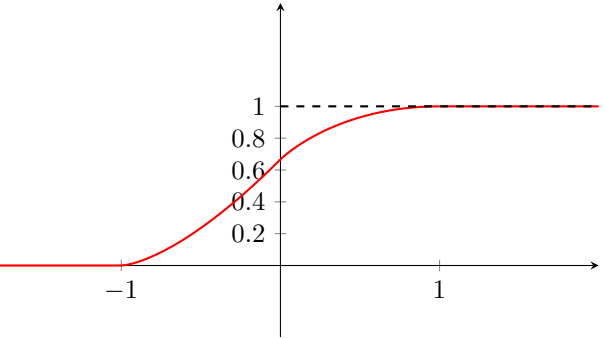
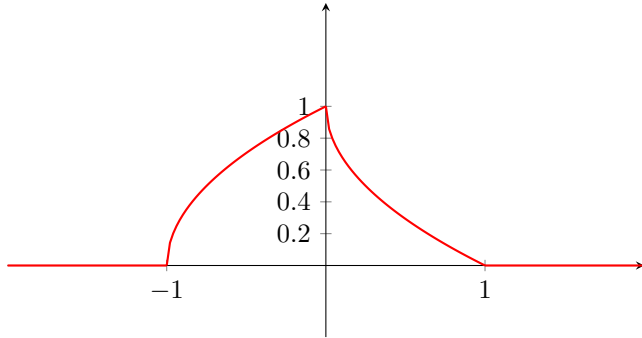


Correction de la feuille Blitz_7 : Variables aléatoires.

1. Soit X une variable de densité f et de fonction de répartition F_X définies ci-dessous :

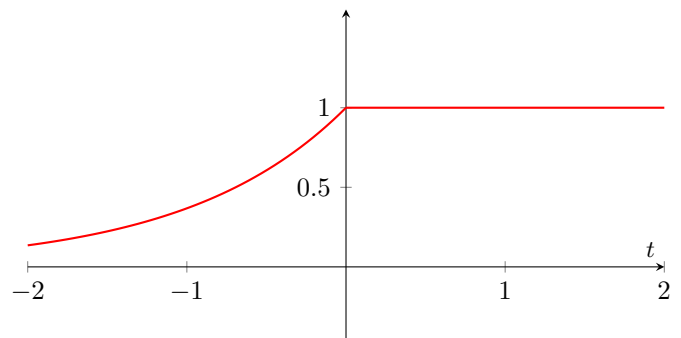
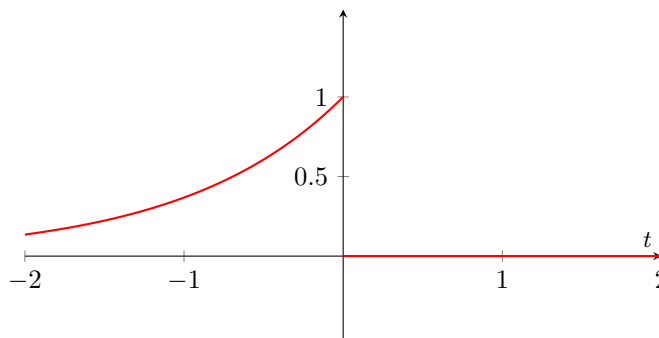
$$\left\{ \begin{array}{ll} f(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, -1[\\ f(t) = \sqrt{t+1} & \text{si } t \in]-1, 0[\\ f(t) = 1 - \sqrt{t} & \text{si } t \in]0, 1[\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} F_X(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, -1[\\ F_X(t) = \frac{2}{3}(t+1)^{\frac{3}{2}} & \text{si } t \in]-1, 0[\\ F_X(t) = t - \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{3} & \text{si } t \in]0, 1[\\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in]1, +\infty[\end{array} \right.$$



- | | | |
|--|--|---|
| 1) Affirmation : X est à valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 2) Affirmation : f prend ses valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 3) Affirmation : X est à valeurs dans $[-1, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 4) Affirmation : F_X prend ses valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 5) Affirmation : L'ensemble des valeurs prises par f est $[-1, 1]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |

2. Soit X une variable de densité f et de fonction de répartition F_X définies ci-dessous :

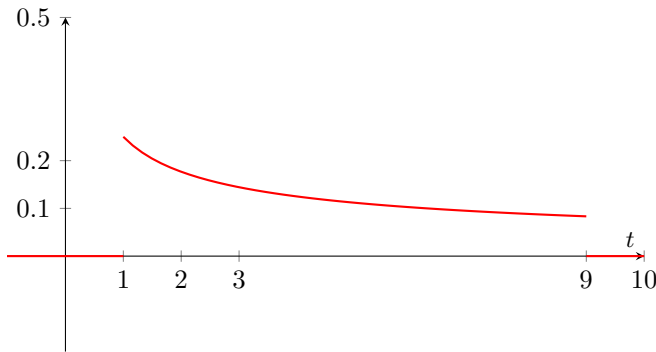
$$\left\{ \begin{array}{ll} f(t) = e^t & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{ll} F_X(t) = e^t & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in]0, +\infty[\end{array} \right.$$



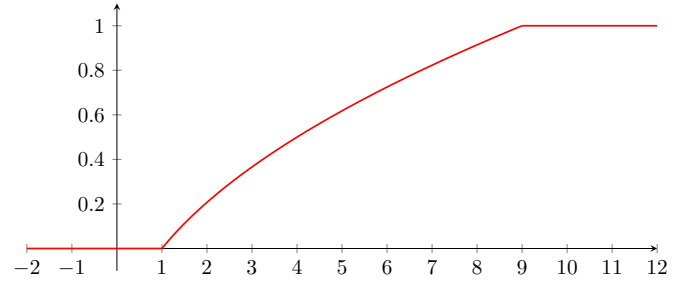
- | | | |
|---|--|---|
| 1) Affirmation : X est à valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 2) Affirmation : f prend toutes les valeurs de $[0, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 3) Affirmation : X est à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 4) Affirmation : F_X réalise une bijection de $] -\infty; 0]$ dans $]0, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 5) Affirmation : f prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_-$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 6) Affirmation : $-X$ suit la loi exponentielle de paramètre 1 | Vrai ☒ Faux ☐ | . |

3. Soit X une variable de densité f et de fonction de répartition F_X définies ci-dessous :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, 1[\\ f(t) = \frac{1}{4\sqrt{t}} & \text{si } t \in]1, 9[\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in]9; +\infty[\end{cases}$$



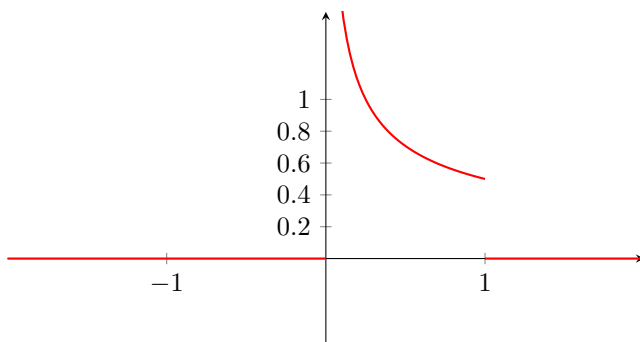
$$\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, 1[\\ F_X(t) = \frac{\sqrt{t}}{2} - \frac{1}{2} & \text{si } t \in]1, 9[\\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in]9; +\infty[\end{cases}$$



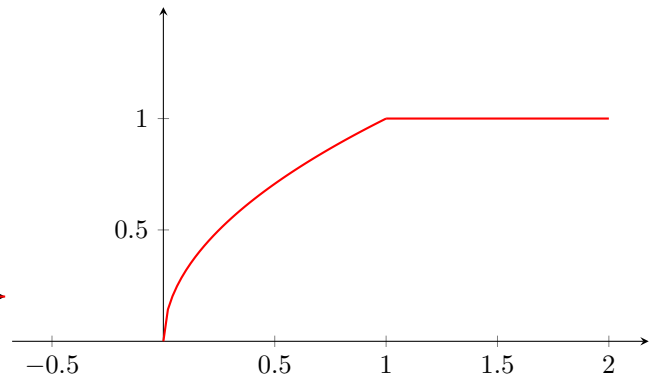
- | | | |
|---|--|---|
| 1) Affirmation : X est à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 2) Affirmation : f prend ses valeurs dans $[1, 9]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 3) Affirmation : X est à valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 4) Affirmation : F_X prend toutes les valeurs de $[0, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 5) Affirmation : X est à valeurs dans $[1, 9]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |

4. Soit X une variable de densité f et de fonction de répartition F_X définies ci-dessous :

$$\begin{cases} f(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ f(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}} & \text{si } t \in]0, 1[\\ f(t) = 0 & \text{si } t \in]1; +\infty[\end{cases}$$



$$\begin{cases} F_X(t) = 0 & \text{si } t \in]-\infty, 0[\\ F_X(t) = \sqrt{t} & \text{si } t \in]0, 1[\\ F_X(t) = 1 & \text{si } t \in]1; +\infty[\end{cases}$$



- | | | |
|---|--|---|
| 1) Affirmation : X est à valeurs dans $[1/2; +\infty[$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 2) Affirmation : f prend ses valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 3) Affirmation : X est à valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 4) Affirmation : F_X prend toutes les valeurs de $[0, 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 5) Affirmation : f prend toutes les valeurs de $[1/2; +\infty[$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |

5. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$.

- | | | |
|--|--|---|
| 1) Affirmation : X est à valeurs dans $[0, 1]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 2) Affirmation : X est à valeurs dans $[0; +\infty[$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 3) Affirmation : $-X^2$ est à valeurs dans $[-1, 0]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 4) Affirmation : $X^2 + 2$ est à valeurs dans $[2; +\infty[$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 5) Affirmation : F_X est une bijection de $] - \infty; +\infty[$ dans $]0, 1[$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |

6. Une expérience consiste à mesurer la taille de haricots pris au hasard dans un champs. La taille du haricot est modélisée par une variable aléatoire notée T .

On admet que T est à valeurs dans $[0, 10]$.

- | | | |
|--|--|---|
| 1) Affirmation : $-T$ est à valeurs dans $\mathbb{R}_-$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 2) Affirmation : $T^2 + 1$ est à valeurs dans $[1; 101]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 3) Affirmation : $(T - 1)^2$ est à valeurs dans $[1; 100]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 4) Affirmation : $\frac{1}{1 + T}$ est à valeurs dans $[1; 100]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 5) Affirmation : $\frac{1}{1 + T}$ est à valeurs dans $[0; 1]$ | Vrai ☒ Faux ☐ | . |

7. Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(1, 2)$

On note : $Y = X - \lfloor X \rfloor$, $Z = \lfloor X \rfloor$ et on admet que Y et Z sont deux variables aléatoires discrètes ou à densité.

- | | | |
|---|--|---|
| 1) Affirmation : X est à valeurs dans $[-2, 2]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 2) Affirmation : Y est une variable aléatoire discrète. | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 3) Affirmation : Z est une variable aléatoire discrète. | Vrai ☒ Faux ☐ | . |
| 4) Affirmation : $Z(\Omega) = \mathbb{N}$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |
| 5) Affirmation : Z est à valeurs dans $[0; 1]$ | Vrai ☐ Faux ☒ | . |

8. 1) Affirmation : L'ensemble des valeurs prises par la fonction $x \mapsto e^x$ est $]0; +\infty[$

Vrai ☒ Faux ☐ .

2) Affirmation : L'ensemble des valeurs prises par la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $]0; +\infty[$

Vrai ☐ Faux ☒ .

3) Affirmation : L'ensemble des valeurs prises par la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est $] - \infty; +\infty[$

Vrai ☒ Faux ☐ .

4) Affirmation : L'ensemble des valeurs prises par la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ est inclus dans $[0, 1]$

Vrai ☒ Faux ☐ .