

Ex 1 : 1) Pour tout couple (i, j) dans $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, q \rrbracket$,

$$\begin{aligned}
 ((AB)^T)_{i,j} &= (AB)_{j,i} \\
 &= \sum_{k=1}^p (A)_{j,k} (B)_{k,i} \\
 &= \sum_{k=1}^p (A^T)_{k,j} (B^T)_{i,k} \\
 &= \sum_{k=1}^p (B^T)_{i,k} (A^T)_{k,j} \\
 &= (B^T A^T)_{i,j}
 \end{aligned}$$

comme ceci est vrai pour tout (i, j) on a bien :

$$\boxed{(AB)^T = B^T A^T}$$

2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on suppose que M est inversible

on a : $M^T \times (M^{-1})^T \underset{(*)}{=} (M^{-1}M)^T = (I_n)^T = I_n$ ((*) d'après 15.)

et $(M^{-1})^T \times M^T \underset{(*)}{=} (MM^{-1})^T = (I_n)^T = I_n$

$$\boxed{\text{Si } M \text{ est inversible alors } M^T \text{ est inversible et l'inverse de } M^T \text{ est } (M^{-1})^T}$$

3) Raisonnons par double inclusion :

- Pour $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, Si $AX = 0_{n,1}$ alors $A^T AX = 0_{p,1}$ donc $\ker(A) \subset \ker(A^T A)$
- Pour $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, Si $A^T AX = 0_{p,1}$ alors $X^T A^T AX = 0$ donc $\|AX\|^2 = 0$ et ainsi $AX = 0_{p,1}$ ce qui prouve :

$$\ker(A^T A) \subset \ker(A)$$

$$\boxed{\ker(A^T A) = \ker(A)}$$

4) $(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A$ donc $A^T A$ est symétrique.

La matrice $A^T A$ est symétrique à coefficients réels donc $\boxed{A^T A \text{ est diagonalisable}}$ (th. spectral)

5) Sur cet exemple

$$A^T A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (\text{On note } M \text{ cette matrice})$$

- d'une part on remarque que $M - 3I_3 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ (de rang 1)

donc 3 est une valeur propre de M , $\dim(E_3(M)) = 2$

$$\text{et } \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } E_3(M)$$

- d'autre part on remarque que : $M \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de M associé à la valeur propre 0.

Sachant que M est une matrice 3×3 les points précédents permettent d'affirmer que

$$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ est une base de } \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ formée de vecteurs propres de } M$$

Autrement dit :

$$\text{En posant : } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ on a : } P \text{ inversible et } A^T A = P D P^{-1}$$

6) La définition de la liberté des C_i est :

$$\forall (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad x_1 C_1 + \dots + x_p C_p = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \implies \forall i \in \llbracket 1; p \rrbracket, \quad x_i = 0$$

Ce qui peut s'écrire :

$$\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}), \quad A X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{n \times 1} \implies X = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}_{p \times 1}$$

ce qui entraîne que $\ker(A) \subset \{0\}$ et comme $0 \in \ker(A)$ il vient $\ker(A) = \{0\}$

Puis en utilisant le résultat de la question 17. il vient $\ker(A^T A) = \{0\}$,

or la matrice $A^T A$ est une matrice 3×3 donc (*un endomorphisme est bijectif si, et seulement s'il est injectif*)

$$\boxed{A^T A \text{ est inversible}}$$

Ex 2 : (*non corrigé*)

Ex 3 : 1) On sait que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \sigma\sqrt{2\pi}$ donc en prenant $\mu = 0$ et $\sigma = \frac{1}{\sqrt{2}}$ il vient :

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}}$$

2) a. $\boxed{\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}$

La fonction φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(x) = \frac{-x}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ donc on bien $\boxed{\varphi'(x) = -x\varphi(x)}$

b. $\boxed{\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(t) dt}$

3) a. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= P(Y \leq x) \\ &= P(\max(X_1, X_2) \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x, X_2 \leq x) \\ &= P(X_1 \leq x)P(X_2 \leq x) \\ &= \Phi(x)^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction de répartition de } Y \text{ est } x \mapsto \Phi(x)^2}$$

Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} F_Z(x) &= 1 - P(Z > x) \\ &= P(\min(X_1, X_2) > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x, X_2 > x) \\ &= 1 - P(X_1 > x)P(X_2 > x) \\ &= 1 - (1 - \Phi(x))^2 \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{La fonction de répartition de } Z \text{ est } x \mapsto \Phi(x)(2 - \Phi(x))}$$

b. Les fonctions de répartitions de Y et Z sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ donc

$$\boxed{Y \text{ et } Z \text{ admettent respectivement pour densité : } f : x \mapsto 2\varphi(x)\Phi(x) \quad \text{et} \quad g : x \mapsto 2\varphi(x) - 2\varphi(x)\Phi(x)}$$

4) a. $x \mapsto 2\varphi(x)\Phi(x)$ est une densité de Y donc

$$\begin{aligned} E(Y) \text{ existe} &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\varphi(x)\Phi(x) \, dx \text{ est absolument convergente} \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} 2x\varphi(x)\Phi(x) \, dx \text{ est convergente (car de signes constants sur } \mathbb{R}^+ \text{ et } \mathbb{R}^-) \\ &\iff \int_{-\infty}^{+\infty} -2\varphi'(x)\Phi(x) \, dx \text{ est convergente} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance si, et seulement si, } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) \, dx \text{ est convergente}}$$

b. Les fonctions φ et Φ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer par parties sur le segment $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b \varphi'(x)\Phi(x) \, dx &= \left[\varphi(x)\Phi(x) \right]_a^b - \int_a^b \varphi(x)\varphi'(x) \, dx \\ &= \varphi(b)\Phi(b) - \varphi(a)\Phi(a) - \frac{1}{2\pi} \int_a^b e^{-x^2} \, dx \end{aligned}$$

or $\lim_{a \rightarrow -\infty} \varphi(a)\Phi(a) = 0$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} \varphi(b)\Phi(b) = 0$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ converge et vaut $\sqrt{\pi}$

donc

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) \, dx \text{ converge et vaut } -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}}$$

c. Le calcul fait à la question 6.(a) montre que $E(Y) = -2 \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(x)\Phi(x) \, dx$ donc on a bien

$$\boxed{E(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

d. Pour $\omega \in \Omega$,

Si $X_1(\omega) < X_2(\omega)$ alors $Y(\omega) = X_2(\omega)$ et $Z(\omega) = X_1(\omega)$ donc $(Y + Z)(\omega) = (X_1 + X_2)(\omega)$,

Si $X_1(\omega) \geq X_2(\omega)$ alors $Y(\omega) = X_1(\omega)$ et $Z(\omega) = X_2(\omega)$ donc $(Y + Z)(\omega) = (X_1 + X_2)(\omega)$.

Donc on a bien

$$\boxed{Y + Z = X_1 + X_2}$$

En utilisant la linéarité de $E(\cdot)$ il vient $E(Y) + E(Z) = 0 + 0$ car X_1 et X_2 sont centrées.

En conclusion :

$$\boxed{E(Z) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}}$$

5) a. Les fonctions φ et Φ sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, on peut intégrer par parties sur le segment $[a, b]$.

$$\begin{aligned} \int_a^b 2x^2\varphi(x)\Phi(x) \, dx &= \int_a^b -2x\varphi'(x)\Phi(x) \, dx \\ &= \left[-2x\Phi(x)\varphi(x) \right]_a^b + 2 \int_a^b (\Phi(x) - x\varphi(x))\varphi(x) \, dx \\ &= -2b\varphi(b)\Phi(b) + 2a\varphi(a)\Phi(a) + 2 \int_a^b \Phi(x)\varphi(x) \, dx - 2 \int_a^b x\varphi^2(x) \, dx \\ &= -2b\varphi(b)\Phi(b) + 2a\varphi(a)\Phi(a) + \Phi^2(b) - \Phi^2(a) - 2 \int_a^b x\varphi^2(x) \, dx \end{aligned}$$

or $\lim_{a \rightarrow -\infty} \varphi(a)\Phi(a) + \Phi(a)^2 = 0$, $\lim_{b \rightarrow +\infty} \varphi(b)\Phi(b) + \Phi(b)^2 = 1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-x^2} \, dx$ converge et vaut 0

Moment des lois normales.

Donc Y^2 admet une espérance et

$$\boxed{E(Y^2) = 1}$$

b. Y et Y^2 admettent une espérance donc Y admet une variance et $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$

$$Y \text{ admet une variance et } V(Y) = \frac{\pi - 1}{\pi}$$

6) a. (*pas besoin de faire une intégration par parties*)

$g : x \mapsto 2\varphi(x) - 2\varphi(x)\Phi(x)$ est une densité de Z

or on a vu que $E(Y^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} 2x^2\varphi(x)\Phi(x)dx = 1$

et on sait que $E(X_1^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\varphi(x)dx = 1$

donc Z^2 admet une espérance et $E(Z^2) = 2 \times 1 - 1$ on a bien $E(Z^2) = 1$

b. Z et Z^2 admettent une espérance donc Z admet une variance et $V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2$

$$Z \text{ admet une variance et } V(Z) = \frac{\pi - 1}{\pi}$$

c. On sait que $Y + Z = X_1 + X_2$, et que X_1 et X_2 sont réduites et indépendantes donc $V(Y + Z) = 2$

or les résultats précédents donnent $V(Y) + V(Z) = 2 \frac{\pi - 1}{\pi}$ qui est différent de 2 donc :

Y et Z ne sont pas indépendantes