

Feuille Cours_12 : Théorème central limite (première forme).

Ex 1 : On appelle échantillon de taille n de la loi d'une variable aléatoire X toute liste de variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ vérifiant :

- ❶ les variables $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.
- ❷ elles suivent toutes la même loi que X .

On dit aussi : $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

1) Soient X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(p)$ et $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de X . Quelle est la loi suivie par $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$?

2) Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires identiques et indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

Quelle est la loi suivie par $Y_n = \sum_{k=1}^n X_k$? par $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$?

Ex 2 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes admettant une espérance μ et une variance σ^2 .

On note $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ la moyenne empirique associée à $(X_1, \dots, X_n)$.

Calculer l'espérance et la variance de M_n .

Ex 3 : 1) Soit Y suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Exprimer Y^* la loi centrée réduite associée à Y .

2) Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires identiques et indépendantes suivant la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

On note M_n la moyenne empirique associée à $(X_1, \dots, X_n)$. Quelle est la loi suivie par M_n^* ?

3) Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes admettant une espérance μ et une variance σ^2 . On note M_n la moyenne empirique associée $(X_1, \dots, X_n)$ et $Y_n = X_1 + \dots + X_n$

a. Donner M_n^* la variable centrée réduite associée à M_n .

b. Montrer que $Y_n^* = M_n^*$.

Ex 4 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes admettant une espérance μ et une variance σ^2 . On note M_n la moyenne empirique.

1) Pour $a < b$, exprimer avec une intégrale de $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq M_n^* \leq b) = \dots$

On admet que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M_n^* = a) = 0$

2) Donner la limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(|M_n - \mu| \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Phi^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)\right) = \dots$

3) En déduire un intervalle de confiance asymptotique de μ au niveau de confiance de 95%.

Ex 5 : 1) Énoncer et démontrer le théorème de Moivre-Laplace.

Indication : On se place dans les conditions du théorème central avec des variables de Bernoulli.

2) Si Y suit la loi binomiale de paramètre (n, p) , par quelle loi peut-on approcher la loi Y pour n suffisamment grand ?

3) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de la loi $\mathcal{B}(p)$. On note $F_n = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n X_k \right)$

Justifier que $\left[F_n - \frac{1}{\sqrt{n}}; F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de p au seuil de confiance de 95%.

Ex 6 : Approximation d'une loi binomiale

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}(200; 0,4)$.

- 1) Calculer l'espérance et la variance de X .
- 2) Justifier que l'on peut approcher la loi de X par une loi normale que l'on précisera.
- 3) Approcher $\mathbb{P}(70 \leq X \leq 90)$.

Ex 7 : Nombre de succès dans une grande expérience

On lance une pièce équilibrée 1000 fois et on note X le nombre de piles obtenus.

- 1) Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
- 2) À l'aide du théorème central limite, approcher $\mathbb{P}(480 \leq X \leq 520)$.
- 3) Approcher $\mathbb{P}(X \geq 550)$.

Ex 8 : Proportion empirique

On considère un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,3$. On note $F_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ la fréquence empirique.

- 1) Calculer $E(F_n)$ et $V(F_n)$.
- 2) Donner la loi asymptotique de

$$F_n^* = \frac{F_n - p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}.$$

- 3) Pour $n = 400$, approcher

$$\mathbb{P}(|F_n - p| \leq 0,05).$$

Ex 9 : Somme de variables aléatoires

Soient $X_1, \dots, X_{100}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi telles que

$$E(X_i) = 2 \quad \text{et} \quad V(X_i) = 9.$$

On pose $S_{100} = X_1 + \dots + X_{100}$.

- 1) Calculer $E(S_{100})$ et $V(S_{100})$.
- 2) Donner une approximation de la loi de S_{100} à l'aide du théorème central limite.
- 3) Approcher : $\mathbb{P}(170 \leq S_{100} \leq 230)$.

Ex 10 : Défauts dans une production

Une machine produit des pièces dont la probabilité d'être défectueuse est 0,02. On prélève 500 pièces. On note X le nombre de pièces défectueuses.

- 1) Donner la loi de X , son espérance et sa variance.
- 2) Justifier que l'on peut utiliser une approximation normale.
- 3) Donner une valeur approchée de : $\mathbb{P}(X \leq 15)$.

Ex 11 : Moyenne empirique

Une variable aléatoire X vérifie $E(X) = 50$ et $V(X) = 16$.

On observe un échantillon $(X_1, \dots, X_{100})$ de variables indépendantes de même loi que X .

On note

$$M_{100} = \frac{1}{100} \sum_{k=1}^{100} X_k.$$

- 1) Calculer $E(M_{100})$ et $V(M_{100})$.
- 2) Donner une approximation de la loi de M_{100} .
- 3) Approcher $\mathbb{P}(49 \leq M_{100} \leq 51)$