

Feuille Exo_22 : Théorèmes limites.

Ex 1 : (G2E 2023)

On s'intéresse ici à la limite de la suite (σ_n) définie par $\sigma_n = \sum_{k=0}^n \frac{n^k}{k!} e^{-n}$.

On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant toutes la même loi de Poisson $\mathcal{P}(1)$.

Par ailleurs, on note : $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$

- 1) a. Énoncer précisément la loi faible des grands nombres.
b. Calculer l'espérance et la variance de M_n .
- 2) a. Donner une expression de M_n^* , la variable aléatoire réelle centrée réduite associée à M_n .
b. Exprimer $P(M_n^* \leq 0)$ en fonction de σ_n .
- 3) a. Énoncer précisément le théorème central limite.
b. En déduire à nouveau que $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et retrouver sa limite.

Ex 2 : (MMI 2023)

Dans cette sous-partie nous chercherons à calculer une approximation des valeurs de $u \in]1; +\infty[$ ainsi que de la volatilité σ , fonction de u défini à la question 8.(a). Cette sous-partie utilise le modèle de la partie 2 mais est indépendante des résultats précédents.

- 1) Pour $n \geq 1$ on pose $Z_n = \ln \left(\frac{S_n}{S_{n-1}} \right)$.

a. Montrer que les Z_i sont indépendantes et suivent toutes une même loi qu'on précisera.

On admet que

$$\boxed{\text{les } Z_i \text{ sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur } \{-\ln(u); \ln(u)\}}$$

b. Calculer l'espérance et la variance de Z_1 .

- 2) Soit $\bar{Z}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i$.

a. Justifier que lorsque n tend vers $+\infty$ la convergence en loi suivante est vraie :

$$\frac{\bar{Z}_n}{\sqrt{\sigma^2/n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

avec σ un réel strictement positif à exprimer en fonction de u . Le terme σ s'appelle la volatilité.

b. Que signifie une volatilité élevée dans la modélisation du prix du blé ?

- 3) a. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer la variance de $\bar{Z}_n$ en fonction de la volatilité. En déduire que l'espérance de la variable aléatoire $V_n = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i - \bar{Z}_n)^2$ est σ^2 .

On pourra commencer par montrer que :

$$\mathbb{E}[V_n] = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\mathbb{E}[Z_i^2] - 2\mathbb{E}[Z_i \bar{Z}_n] + \mathbb{E}[\bar{Z}_n^2])$$

b. Que représente V_n ?

c. Donner une interprétation qualitative de la variable aléatoire $U_n = \exp(\sqrt{V_n})$.

Ex 3 : Intervalle de fluctuation.

On lance un dé non truqué, on s'intéresse à la fréquence d'apparition du 6.

Trouver un nombre de lancers qui permette d'affirmer que cette fréquence diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus $\frac{1}{100}$ avec une probabilité supérieure à 0,95.

- 1) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.
- 2) En utilisant le théorème central limite.

Ex 4 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables indépendantes de même loi d'espérance μ et de variance σ^2 .

on définit :
$$M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \quad \text{et} \quad M_n^* = \frac{M_n \sqrt{n} - \mu \sqrt{n}}{\sigma}$$

1) Justifier que (M_n^*) converge en loi vers une variable X dont on précisera la loi.

2) Montrer que pour tout $t > 0$,

$$P(M_n \leq \mu - t) \leq P(|M_n - \mu| \geq t) \quad \text{et} \quad P(M_n \leq \mu + t) \geq P(|M_n - \mu| \leq t).$$

3) Appliquer l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à M_n .

On admet que :
$$\text{Pour tout } t > 0, P(|M_n - \mu| \geq t) \leq \frac{\sigma^2}{nt^2}$$

4) En déduire que : (M_n) converge en loi vers la variable certaine égale à μ .

On devra utiliser ici la définition

Ex 5 : Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.

1) Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, rappeler la fonction de répartition de X_n .

2) En déduire que : (X_n) converge en loi vers la variable certaine égale à 0.

On devra utiliser ici la définition

Ex 6 : On considère X le nombre de garçons parmi n naissances choisies au hasard. On suppose que, pour chaque naissance, la probabilité que ce soit un garçon est $p = 0,514$, et que les naissances sont indépendantes entre elles.

Le but de cet exercice est de déterminer l'entier n à partir duquel on a $P\left(X < \frac{n}{2}\right) \leq 0,01$.

On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(X < \frac{n}{2}\right) = 0$ (loi faible des grands nombres).

1) Que représente $P\left(X < \frac{n}{2}\right)$?

2) Quelle est la loi de X ?

3) Décrire un traitement informatique de cette question.

4) Déterminer n en utilisant l'approximation donnée par le théorème de Moivre-Laplace.

Ex 7 : On considère une population de rongeurs. Afin de déterminer la proportion de mâles dans la population, on considère un échantillon sur 400 naissances. Sur celles-ci, 206 rongeurs sont des mâles.

Déterminer un intervalle de confiance pour la proportion inconnue de mâles au niveau de 95%

Ex 8 : (MCR 2021) Équilibre de Hardy-Weinberg (Le reste du sujet est intéressant, il est proche d'un sujet MMI)

Soient p_1, p_2, p_3 trois réels strictement positifs tels que $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

On considère N variables aléatoires $T_1, \dots, T_N$ indépendantes de même loi donnée par :

$$T_1(\Omega) = \{1, 2, 3\} \quad \mathbb{P}(T_1 = 1) = p_1, \quad \mathbb{P}(T_1 = 2) = p_2, \quad \mathbb{P}(T_1 = 3) = p_3.$$

Cette suite permet de modéliser la répartition d'une population de N individus de type AA (type 1), Aa (type 2) ou aa (type 3) en fonction de leur génotype à un locus génétique donné.

Pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, on note N_i la variable aléatoire égale au nombre d'individus de type i .

On a donc $N_1 + N_2 + N_3 = N$.

1) Déterminer la loi de N_1 .

2) Donner, sans justification, l'espérance et la variance de N_1 .

3) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$.

Exprimer la quantité $\lim_{N \rightarrow +\infty} P\left(a \leq \frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1-p_1)}} \leq b\right)$ sous forme d'une intégrale.