Colles de mathématiques - Semaine 19 - du 16/03/26

La colle commencera par une question de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

- **Variables aléatoires réelles à densité.**

Loi normale centrée réduite. Densité, allure des courbes. Propriété de la fonction de répartition. (notée Φ)

Fonction des quantiles (*réciproque de* Φ). Notée $\alpha \longmapsto u_\alpha$.

(cette notation n'est plus indiquée dans le programme).

Lecture d'une table donnant les valeurs de Φ sur $[0, 3]$ et/ou utilisation de la calculatrice et/ou Python.

(Savoir trouver une valeur approchée de $\Phi(x)$ *pour* $x \in [-3, 3]$ *et un encadrement de* u_α *pour* $\alpha \in]0, 1[$ *).*

Loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, on note $\mathscr{N}(\mu, \sigma^2)$

Stabilité de l'ensemble des lois normales par transformation affine.

En particulier : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \iff X^* = \dfrac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1).$

Loi de la somme de deux variables aléatoires indépendantes à densité. *(Produit de convolution)*

(On rappelle la formule si nécessaire)

Somme (combinaison linéaire) de gaussiennes indépendantes.

- **Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.**

Produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$. Ecriture matricielle. Bilinéarité.
Norme euclidienne. Inégalité de Cauchy-Schwarz et inégalité triangulaire. Cas d'égalité.
Vecteurs orthogonaux. de $\mathbb{R}^n$ ou de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Théorème de Pythagore. *(Enoncés et démonstrations)*
Base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
Le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales.
Savoir trouver une base orthonormale d'une droite ou d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
On admet qu'il existe une base orthonormale de tout sous-espace F dès que F n'est pas réduit au vecteur nul.
Si P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales alors P est inversible et $P^{-1} = P^\top$
Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

(Démonstration)

Théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Pas encore l'orthogonal $F^\perp$ *ni de projection orthogonale.*

- **Théorèmes limites.**

Les notions d'échantillons, de biais, d'estimateurs ne sont plus au programme.

Mais ces notions ont été systématiquement rappelées et utilisées dans les exercices.

La moyenne empirique : $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires (X_n) vers une variable aléatoire X.
Cas particulier où X et les X_n prennent des valeurs dans $\mathbb{N}$.
Convergence en loi d'une suite de VAR de lois binomiales vers une variable aléatoire de loi de Poisson.
Approximation d'une loi par la loi de la variable limite. *(Les critères d'approximation devront être explicités)*
Théorème central limite (*première forme*). *(Pour la somme et la moyenne empirique)*
Cas de la loi binomiale. (*Théorème de Moivre-Laplace.*)

Pas encore les inégalités, pas de loi faible des grands nombres.

Pas encore d'écart-type empirique, pas de TCL deuxième forme.

- **Informatique.**

Fonction de calcul de la moyenne et de l'écart-type d'une série statistique.
Fonction qui renvoie le tableau de valeurs des fréquences cumulées d'une série statistique.
Simulation de la réalisation d'une variable aléatoire X suivant une loi usuelle discrète ou continue.
Avec une longue série de simulations :

- Estimation d'une probabilité. *(fréquence des réalisations)*
- Estimation de l'espérance d'une variable aléatoire *(moyenne arithmétique des réalisations)*
- Estimation de la fonction de répartition *(Courbe des fréquences cumulées)*