

Pour ceux qui utilisent spyder et qui veulent des représentations dans des fenêtres séparées :

Outils-Préférences-Console IPython-Graphiques-Sortie : Automatique

1) Illustration de la loi faible des grands nombres.

- a) Télécharger `Fichier1.py` donné en annexe et l'exécuter.
- b) Citer le théorème de la loi faible des grands nombres.
- c) Commenter chaque partie du programme en précisant la loi simulée dans `simul.X()`.
- d) Justifier la valeur de `mu` dans chaque cas.
- e) Ajouter une illustration avec une loi de votre choix.
- f) Déposer le fichier sur Cahier-de-prépa.

2) Illustration du théorème central limite.

- a) Télécharger `Fichier2.py` donné en annexe et l'exécuter.
- b) Citer le théorème central limite.
- c) Commenter chaque partie du programme en précisant la loi simulée dans `simul.X()`.
- d) Justifier la valeur de `mu` et `v` dans chaque cas.
- e) Adapter, dans chaque cas, la valeur de n de sorte que l'approximation gaussienne soit visuellement satisfaisante.
- f) Tenter de refaire cette illustration dans un fichier vierge avec une loi de votre choix.
- g) Déposer les fichiers sur Cahier-de-prépa.

Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi, d'espérance μ et de variance σ^2 .

On définit $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ et on rappelle que $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$.

3) Majoration de $P(|M_n - \mu| > \varepsilon)$ par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$P(|M_n - \mu| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

4) Approximation de $P(|M_n - \mu| > \varepsilon)$ à l'aide du théorème central limite.

ε étant fixé, justifier que, pour n assez grand,

$$P(|M_n - \mu| > \varepsilon) \approx 2 \left(1 - \Phi \left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma} \right) \right)$$

Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

5) Nombre de simulations nécessaires.

On fixe $\varepsilon = 0,1$, et on prend la loi $\mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$,

- a) Calculer μ et σ^2 .
- b) Pour quelles valeurs de n l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne $P(|M_n - \mu| > \varepsilon) \leq 0.05$?
- c) Pour quelle valeur de n le théorème central limite donne $P(|M_n - \mu| > \varepsilon) \approx 0.05$?
- d) Comparer les deux résultats.

6) Comparaison avec une étude expérimentale.

- a) En reprenant la situation de **5)** :
Déterminer, avec une série de simulations, n pour lequel $P(|M_n - \mu| > \varepsilon) \approx 0.05$.
- b) Refaire la même étude en remplaçant la loi $\mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$ par une loi normale.
- c) Refaire la même étude en remplaçant la loi $\mathcal{U}(\{0, 1, 2\})$ par une loi quelconque de votre choix.

7) Conclusion

- a) En quel sens la suite (M_n) converge vers μ ?
- b) Comment quantifier la précision de M_n ?
- c) Quelles sont les différences entre les estimations fournies par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et le théorème central limite ?
- d) Quel est le rôle des simulations dans cette étude ?