

Feuille Cours_13 : Couples de variables aléatoires discrètes.

X , Y et Z désignent ici des variables aléatoires discrètes d'un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$.

Introduction.

Deux exemples pour illustrer les différentes définitions :

EX 1 : On lance une pièce équilibrée, jusqu'à obtenir 3 piles ou 3 faces (*pas nécessairement l'un derrière l'autre*). On note X le nombre de lancers effectués et Y le nombre de piles obtenus.

EX 2 : On répète une expérience de Bernoulli de paramètre p de manière indépendante. On note X le rang du premier succès et Y le rang du deuxième succès.

Définition (*loi conjointe*)

- Ex 1 :**
- 1) Donner la loi conjointe de l'exemple **EX 1** dans un tableau.
 - 2) Donner la loi conjointe de l'exemple **EX 2**.
 - 3) Quelles sont les valeurs prises par le couple (X, Y) dans les deux exemples ?

Définition. (*lois marginales*)

- Ex 2 :**
- 1) Donner les lois marginales de l'exemple.
 - 2) Donner dans le cas général, les lois marginales en fonction de la loi conjointe.

Théorème : (*Théorème de transfert dans le cas de variable aléatoire prenant un nombre fini de valeurs*)

- Ex 3 :**
- 1) Calculer $E(XY)$ de l'exemple **EX 1** en utilisant la loi conjointe.
 - 2) Calculer $E(XY)$ de l'exemple **EX 2** en remarquant que $Y = X + Z$ avec X et Z indépendantes.

Définition/théorème : (*Covariance et formule de Koenig-Huygens*)

- Ex 4 :**
- 1) Démontrer la formule de Koenig-Huygens.
 - 2) Calculer la covariance de (X, Y) de **EX 1**.
 - 3) Calculer la covariance de (X, Y) de **EX 2** en remarquant que $Y = X + Z$ avec X et Z indépendantes.
 - 4) Montrer que le coefficient de corrélation de (X, Y) dans l'**EX 2** est égal à $\frac{1}{\sqrt{2}}$

Proposition : (*Propriétés de la covariance. Positive, symétrique et bilinéaire.*)

Ex 5 : Démontrer ces propriétés.

Proposition : (*Lien avec la variance. Variance d'une somme.*)

- Ex 6 :**
- 1) Démontrer ces relations.
 - 2) Généraliser la formule donnant la variance d'une somme.

Théorème : (*Condition nécessaire pour que deux variables aléatoires soient indépendantes.*)

Ex 7 : *Un exemple qui montre que la réciproque est fausse.*

On range trois boules dans trois tiroirs T_1, T_2, T_3 , chaque tiroir pouvant contenir jusqu'à trois boules. X_1 représente le nombre de boules contenues dans le tiroir T_1 et N le nombre de tiroirs occupés.

- 1) Déterminer la loi conjointe du couple (N, X_1) .
- 2) Les variables N et X_1 sont-elles indépendantes ?
- 3) Calculer la covariance de (N, X_1) .

Ex 8 : (*Théorème de Cauchy-Schwarz. Coefficient de corrélation.*)

Soient X et Y deux variables aléatoires discrètes admettant un moment d'ordre 2 et telles que $V(X) \neq 0$.

- 1) Déterminer le discriminant de la fonction polynomiale $P : \lambda \mapsto V(\lambda X + Y)$.
- 2) En remarquant que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, P(\lambda) \geq 0$, montrer que : $\text{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$
- 3) Montrer l'équivalence :

$$(\text{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$$

- 4) Montrer que si $\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$ alors $a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X)$.