

Correction de EX 1.

1) Les valeurs prises par X et Y sont : $X(\Omega) = \{3; 4; 5\}$ et $Y(\Omega) = \{0; 1; 2; 3\}$.

On notant $Z = (X, Y)$, $Z(\Omega) = \{(3, 0), (3, 3), (4, 1), (4, 3), (5, 2), (5, 3)\}$.

Pour justifier les probabilités on utilisera les notations suivantes : $PPFP$: "obtenir pile-pile-face-pile"

$$[X = 3] \cap [Y = 0] = FFF \quad \text{donc} \quad P([X = 3] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{8}$$

$$[X = 3] \cap [Y = 3] = PPP \quad \text{donc} \quad P([X = 3] \cap [Y = 3]) = \frac{1}{8}$$

$$[X = 4] \cap [Y = 1] = PFFF \cup FFFF \cup FFPP \quad \text{donc} \quad P([X = 4] \cap [Y = 1]) = \frac{3}{16}$$

$$[X = 4] \cap [Y = 3] = FPPP \cup PFPP \cup PPFP \quad \text{donc} \quad P([X = 4] \cap [Y = 3]) = \frac{3}{16}$$

$$[X = 5] \cap [Y = 2] = PPFFF \cup \dots \cup FFPPF \quad \text{donc} \quad P([X = 5] \cap [Y = 2]) = \frac{6}{32}$$

$$[X = 5] \cap [Y = 3] = FFPPP \cup \dots \cup PPFPF \quad \text{donc} \quad P([X = 5] \cap [Y = 3]) = \frac{6}{32}$$

En résumé :

$x \backslash y$	0	1	2	3
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$
4	0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$
5	0	0	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$

Une autre rédaction (plus rigoureuse).

On note F_k : "le $k^{\text{ième}}$ lancer donne face"

- $[X = 3] \cap [Y = 0] = F_1 \cap F_2 \cap F_3 \quad \text{donc} \quad P([X = 3] \cap [Y = 0]) = P(F_1)P_{F_1}(F_2)P_{F_1 \cap F_2}(F_3)$

$$P([X = 3] \cap [Y = 0]) = \frac{1}{8}$$

on montre de même $P([X = 3] \cap [Y = 3]) = \frac{1}{8}$

- $[X = 4] \cap [Y = 1] = \underbrace{(\overline{F_1} \cap F_2 \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap F_4)}_{\text{3 événements deux à deux disjoints tous de probabilité } \frac{1}{16}}$

$$\text{donc} \quad P([X = 4] \cap [Y = 1]) = \frac{3}{16}$$

on montre de même $P([X = 4] \cap [Y = 3]) = \frac{3}{16}$

- $[X = 5] \cap [Y = 2] = \underbrace{(\overline{F_1} \cap \overline{F_2} \cap F_3 \cap F_4 \cap F_5) \cup \dots \cup (F_1 \cap F_2 \cap \overline{F_3} \cap \overline{F_4} \cap F_5)}_{\substack{(4) \text{ événements deux à deux disjoints tous de probabilité } \frac{1}{32}}}$

$$\text{donc} \quad P([X = 5] \cap [Y = 2]) = \frac{6}{32}$$

on montre de même $P([X = 5] \cap [Y = 3]) = \frac{6}{32}$

2) On peut retrouver les lois marginales avec la loi conjointe en utilisant la formule des probabilités totales.

On peut le résumer dans le tableau suivant :

$x \backslash y$	0	1	2	3	
3	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
4	0	$\frac{3}{16}$	0	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{8}$
5	0	0	$\frac{6}{32}$	$\frac{6}{32}$	$\frac{3}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{2}$	1

3) La loi de X donne $E(X) = 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{3}{8} + 5 \times \frac{3}{8} = \frac{33}{8}$

La loi de Y donne $E(Y) = 0 \times \frac{1}{8} + 1 \times \frac{3}{16} + 2 \times \frac{3}{16} + 3 \times \frac{1}{2} = \frac{33}{16}$

La loi conjointe de (X, Y) et le *théorème de transfert* donne :

$$\begin{aligned}
 E(XY) &= 3 \times 0 \times \frac{1}{8} + 3 \times 1 \times 0 + 3 \times 2 \times 0 + 3 \times 3 \times \frac{1}{8} \\
 &\quad + 4 \times 0 \times 0 + 4 \times 1 \times \frac{3}{16} + 4 \times 2 \times 0 + 4 \times 3 \times \frac{3}{16} \\
 &\quad + 5 \times 0 \times 0 + 5 \times 1 \times 0 + 5 \times 2 \times \frac{6}{32} + 5 \times 3 \times \frac{6}{32} \\
 E(XY) &= \frac{9}{8} + \frac{3}{4} + \frac{9}{4} + \frac{15}{8} + \frac{45}{16} = \frac{141}{16}
 \end{aligned}$$

Or on sait que : $\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$ donc $\text{cov}(X, Y) = \frac{141}{16} - \frac{33}{8} \times \frac{33}{16}$

La covariance de (X, Y) est égale à $\frac{39}{128}$

Correction de EX 2.

On note : S_k : " un succès à la k ème épreuve et E_k " : " un échec à la k ème épreuve".

Soit k_1 et k_2 deux entiers

Si $1 \leq k_1 < k_2$ alors $\mathbb{P}((X = k_1) \cap (Y = k_2)) = P(\underbrace{E_1 \cap \dots}_{\text{que des } E_i} \cap S_{k_1} \cap \underbrace{E_{k_1+1} \cap \dots}_{\text{que des } E_i} \cap S_{k_2}) = q^{k_1-1} \times p \times q^{k_2-k_1-1} \times p$

Sinon $\mathbb{P}((X = k_1) \cap (Y = k_2)) = 0$

La loi conjointe du couple (X, Y) est :

$$(X, Y)(\Omega) \subset (\mathbb{N}^*)^2 \text{ et } \forall (k_1, k_2) \in (\mathbb{N}^*)^2, \mathbb{P}((X = k_1) \cap (Y = k_2)) = q^{k_2-2} p^2 \mathbb{1}_{k_1 < k_2}$$

X est le rang du premier succès lors d'une succession d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes donc

X suit la loi géométrique de paramètre p

Pour trouver la loi de Y , on utilise la formule des probabilités totales :

pour $k \geq 2$,

$$\begin{aligned}
 P(Y = k) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}((X = n) \cap (Y = k)) \\
 &= \sum_{n=1}^{+\infty} q^{k-2} p^2 \mathbb{1}_{n < k} \\
 &= \sum_{n=1}^{k-1} q^{k-2} p^2 \\
 &= (k-1) q^{k-2} p^2
 \end{aligned}$$

$$Y(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket \quad \text{et} \quad \text{pour tout } k \geq 2, \quad P(Y = k) = (k-1) q^{k-2} p^2$$

Extrait de la correction de la Feuille_Exo_9 donnant la loi de la somme de deux géométriques indépendantes de paramètres p .

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre p et $Z_3 = X + Y$.

On sait que : $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ donc $Z_3(\Omega) \subset \llbracket 2; +\infty \llbracket$,

et en appliquant la formule des probabilités totales avec le système complet : $([X = k])_{k \in \mathbb{N}}$,

$$\begin{aligned}
 P([Z_3 = n]) &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [X + Y = n]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k] \cap [Y = n - k]) \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} P([X = k]) \times P([Y = n - k]) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes} \\
 &= \sum_{k=1}^{+\infty} q^{k-1} p \times q^{n-k-1} p \times \mathbb{1}_{n-k \geq 1} \\
 &= \sum_{k=1}^{n-1} p^2 q^{n-2} \\
 &= (n-1) p^2 q^{n-2}
 \end{aligned}$$

$$Z_3(\Omega) = \llbracket 2; +\infty \llbracket \text{ et pour tout } n \in \llbracket 2; +\infty \llbracket, \quad P([Z_3 = n]) = (n-1) p^2 q^{n-2}$$

(On retrouve bien, la loi de Y de l'exemple **EX 2**)

Ex 7 :

Première approche : (Ce n'est pas celle que nous avons fait au tableau)

On utilise le modèle : $\Omega = \{1, 2, 3\}^3$ et P uniforme. ($\text{card}(\Omega) = 3^3 = 27$)

Le triplet (i, j, k) correspond au résultat :

la boule 1 dans le tiroir i , la boule 2 dans le tiroir j et la boule 3 dans le tiroir k .

1) (ce n'est pas une rédaction pour un écrit, c'est trop long).

On commence par indiquer les valeurs de N et X_1 et les couples impossibles dans le tableau suivant :

$N \setminus X_1$	0	1	2	3	
1		0	0		
2				0	
3	0		0	0	
					1

On remarque que X_1 suit la loi binomiale de paramètres $\left(3; \frac{1}{3}\right)$ on peut alors compléter le tableau avec la loi de X_1 et certaine case du tableau de la loi conjointe :

$N \setminus X_1$	0	1	2	3	
1		0	0	$\frac{1}{27}$	
2			$\frac{6}{27}$	0	
3	0		0	0	
	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

$[N = 1] \cap [X_1 = 0]$: les trois boules sont toutes dans le tiroir 2 ou toutes dans le tiroir 3, donc :

$$[N = 1] \cap [X_1 = 0] = \{(2, 2, 2), (3, 3, 3)\}$$

donc

$$P([N = 1] \cap [X_1 = 0]) = \frac{2}{27}$$

on complète alors le tableau :

$N \setminus X_1$	0	1	2	3	
1	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$	
2	$\frac{6}{27}$		$\frac{6}{27}$	0	
3	0		0	0	
	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

$[N = 3] \cap [X_1 = 1]$: les trois boules sont répartis dans les trois tiroirs,

$$[N = 3] \cap [X_1 = 1] = \underbrace{\{(1, 2, 3), \dots, (3, 2, 1)\}}_{\text{permutations de } \{1, 2, 3\}}$$

$$P([N = 3] \cap [X_1 = 1]) = \frac{3!}{27}$$

On peut alors compléter entièrement le tableau :

$N \setminus X_1$	0	1	2	3	
1	$\frac{2}{27}$	0	0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$
2	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{6}{27}$	0	$\frac{18}{27}$
3	0	$\frac{6}{27}$	0	0	$\frac{6}{27}$
	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$	1

Une autre approche : (*celle utilisée au tableau*)

On utilise les notations suivantes :

- U_i : La première boule dans le tiroir T_i ,
- D_i : La deuxième boule dans le tiroir T_i ,
- T_i : La troisième boule dans le tiroir T_i .

Ce qui permet de traduire les différents événements associés au couple (N, X_1) :

$$\begin{aligned}
 P(N = 1, X_1 = 0) &= P((U_2 \cap D_2 \cap T_2) \cup (U_3 \cap D_3 \cap T_3)) \\
 &= P(U_2 \cap D_2 \cap T_2) + P(U_3 \cap D_3 \cap T_3) \quad (\text{incompatibilité}) \\
 &= P(U_2)P(D_2)P(T_2) + P(U_3)P(D_3)P(T_3) \quad (\text{indépendance}) \\
 &= \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^3}
 \end{aligned}$$

2) On remarque que $P([N = 1] \cap [X_1 = 1]) = 0 \neq P([N = 1]) \times P([X_1 = 1])$ donc

Les variables N et X_1 ne sont pas indépendantes

3) Le théorème de transfert donne :

$$E(NX_1) = 1 \times 3 \times \frac{1}{27} + 2 \times 1 \times \frac{6}{27} + 2 \times 2 \times \frac{6}{27} + 3 \times 1 \times \frac{6}{27} = \frac{19}{9}$$

$$X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3; \frac{1}{3}\right) \quad \text{donc} \quad E(X_1) = 1 \quad \text{et} \quad E(N) = 1 \times \frac{3}{27} + 2 \times \frac{18}{27} + 3 \times \frac{6}{27} = \frac{19}{9}$$

or $\text{cov}(N, X_1) = E(NX_1) - E(N) \times E(X_1)$ donc :

$$\text{cov}(N, X_1) = 0$$

Remarque : C'est un exemple de couple de variables aléatoires non corrélées et non indépendantes.

Correction de l'Ex 8 : (*Nous ne l'avons pas fait en classe.*)

1)

$$\begin{aligned}
 P(\lambda) &= V(\lambda X + Y) \\
 &= \lambda^2 V(X) + 2\lambda \text{cov}(X, Y) + V(Y)
 \end{aligned}$$

et comme $V(X) \neq 0$, P est un polynôme de degré 2.

Son discriminant est : $\Delta = 4\text{cov}(X, Y)^2 - 4V(X)V(Y)$,

$$\Delta = 4(\text{cov}(X, Y)^2 - V(X)V(Y))$$

2) $P(\lambda)$ est la variance d'un variable aléatoire donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) \geq 0$,
donc P a au plus une racine réelle et ainsi $\Delta \leq 0$ ou encore

$$\text{cov}(X, Y)^2 \leq V(X)V(Y)$$

3) En utilisant les notations des questions précédentes :

$$\begin{aligned}
 (\text{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y) &\iff \Delta = 0 \\
 &\iff P \text{ possède une racine réelle} && \text{car } \Delta \leq 0 \\
 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad V(\lambda X + Y) = 0 \\
 &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R} : \quad \lambda X + Y \text{ est quasi-certaine} \\
 &\iff \exists (\lambda, b) \in \mathbb{R}^2 : \quad \mathbb{P}([\lambda X + Y = b]) = 1 \\
 &\iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 : \quad \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1
 \end{aligned}$$

$$(\text{cov}(X, Y))^2 = V(X)V(Y) \iff \exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$$

4) Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{P}([Y = aX + b]) = 1$

on a donc $Y - aX$ qui est quasi certaine égale à b donc $E(Y - aX) = b$ et ainsi $b = \mathbb{E}(Y) - a\mathbb{E}(X)$

de plus précédente montre que $-a$ est la racine double de P ce qui donne $-a = \frac{-2\text{cov}(X, Y)}{2V(X)}$

(expression de la racine double)

ou encore
$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$$

On peut faire autrement :

$Y - aX$ et X sont indépendantes car $Y - aX$ quasi-certain donc $\text{cov}(X, Y - aX) = 0$

on retrouve bien
$$a = \frac{\text{cov}(X, Y)}{V(X)}$$