

La colle commencera par une question de cours, les démonstrations peuvent être données en exercice.

• **Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.**

Base orthonormale de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ ou d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Le produit scalaire et la norme se calculent de la même manière dans toutes les bases orthonormales.

Savoir trouver une base orthonormale d'une droite ou d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On admet qu'il existe une base orthonormale de tout sous-espace F dès que F n'est pas réduit au vecteur nul.

Si P est la matrice de passage entre deux bases orthonormales alors P est inversible et $P^{-1} = P^\top$

Deux vecteurs propres d'une matrice symétrique réelle associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

(Démonstration)

Théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable dans une base orthonormale.

Pas encore l'orthogonal $F^\perp$ ni de projection orthogonale.

• **Couples de variables aléatoires discrètes.**

Loi conjointe. Loïs marginales. Loïs conditionnelles.

Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$. (on ne traitera que le cas $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis).

Exemples de recherche de la loi de $u(X, Y)$, le couple ayant une loi conjointe connue.

En particulier $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, $X + Y$.

Somme de deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. (pas nécessairement indépendantes).

Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson.

Covariance. Propriétés. Variance de $X + Y$.

• **Théorèmes limites.**

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres. (La notion de convergence en probabilité n'est pas au programme de BCPST)

Les notions d'échantillons, de biais, d'estimateurs ne sont plus au programme.

Mais ces notions ont été systématiquement rappelées et utilisées dans les exercices.

Définition de la moyenne empirique : $M_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$, de l'écart-type empirique $S_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2}$

(savoir montrer que $E(M_n) = \mu$, $E(M_n) = \frac{\sigma^2}{n}$ et $E(S_n^2) = \sigma^2 - \frac{\sigma^2}{n}$)

Définition de la convergence en loi d'une suite de variables aléatoires (X_n) vers une variable aléatoire X .

Cas particulier où X et les X_n prennent des valeurs dans $\mathbb{N}$.

Convergence en loi d'une suite de VAR de lois binomiales vers une variable aléatoire de loi de Poisson.

Approximation d'une loi par la loi de la variable limite. (Les critères d'approximation devront être explicités)

Théorème central limite (première forme). (Pour la somme et la moyenne empirique)

Cas de la loi binomiale. (Théorème de Moivre-Laplace.)

Théorème central limite (deuxième forme). $\left(\frac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

l'écart-type empirique corrigée $S'_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2}$ (savoir montrer que $E(S_n'^2) = \sigma^2$)

Théorème central limite (deuxième forme, deuxième version). $\left(\frac{M_n - \mu}{\frac{S'_n}{\sqrt{n}}} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

(Nous avons fait le lien avec la loi de Student et les intervalles de confiance)

Nous avons vu la notion d'intervalle de confiance asymptotique, mais elle n'apparaît pas dans le programme de BCPST.

Pas encore de test de conformité à la moyenne.