

Feuille Exo_24 : Couples de variables aléatoires discrètes.

- Ex 1 :** Une urne contient 3 boules : deux blanches numérotées 1 et 2 et une boule noire.
On effectue des tirages avec remise d'au plus 10 boules. Si on tire une noire on arrête les tirages.
Notons N la variable aléatoire correspondant au nombre de boules blanches tirées et X la somme des numéros des boules blanches tirées.
- 1) Trouver la loi de N .
 - 2) Trouver la loi conditionnelle de X sachant $[N = n]$. Quelle est l'espérance de cette loi ?
 - 3) Déterminer l'espérance de X ?
- Ex 2 :** On considère n personnes se répartissant aléatoirement dans 3 hôtels H_1, H_2, H_3 de manière équiprobable.
On note X_i le nombre de personnes ayant choisi l'hôtel H_i .
- 1) Déterminer les lois de X_1, X_2 et X_3 ; leurs espérances et leurs variances.
 - 2) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de $X_1 + X_2$.
 - 3) Calculer la covariance de (X_1, X_2) .
Le signe de cette covariance vous paraît-il raisonnable ?
- Ex 3 :** Soient λ et μ deux réels strictement positifs ;
et trois variables aléatoires A, B, C indépendantes telles que $A \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda), B \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu), C \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.
On pose $X = A + B$ et $Y = B + C$.
- 1) Rappeler les lois de X et Y .
 - 2) Justifier que le couple (X, Y) admet une covariance, et la calculer.
- Ex 4 :** On lance deux dés usuels (bien équilibrés). X donne le nombre de faces 3 obtenues et Y associe au résultat (i, j) d'un lancer le nombre $|i - j|$.
Donner la loi conjointe et les lois marginales du couple (X, Y) .
Calculer la covariance du couple (X, Y) .
- Ex 5 :** On considère n joueurs qui tirent à la carabine sur une cible. Chaque joueur dispose de 2 coups, et touche la cible avec une probabilité p .
Les différents joueurs et les différents tirs sont supposés indépendants.
- 1) On note X_1 le nombre de tireurs qui touchent la cible au premier tir, et X_2 le nombre de tireurs qui touchent la cible au second tir.
Donner les lois de X_1, X_2 et $X_1 + X_2$.
 - 2) On note A le nombre de tireurs touchant la cible lors de leurs deux essais ; et B le nombre de tireurs touchant la cible sur un seul des deux essais.
Donner la loi de A et de B .
 - 3) Exprimer $X_1 + X_2$ en fonction de A et B ; en déduire $\text{Cov}(A, B)$. Interpréter son signe.
- Ex 6 :** On dispose de n urnes numérotées $1, 2, \dots, n$. (n est un entier naturel non nul).
Pour chaque entier k compris entre 1 et n , l'urne U_k contient k boules numérotées de 1 à k .
On choisit une urne au hasard et on tire une boule de cette urne.
On définit les deux variables aléatoires X et Y par :
 X : le numéro de l'urne choisie et Y : le numéro de la boule tirée.
- 1) Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
 - 2) En déduire les lois marginales du couple (X, Y) .
 - 3) Calculer l'espérance des variables X, Y et XY en fonction de n .
 - 4) Montrer que la covariance du couple (X, Y) est donnée par : $\text{cov}(X, Y) = \frac{n^2 - 1}{24}$.
- Ex 7 :** Une urne contient cinq boules vertes numérotées de 1 à 5 et trois boules jaunes numérotées de 1 à 3.
On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne.
On note X le nombre de boules vertes obtenus et Y le nombre de boules obtenues portant un numéro impair.
Ici, on donnera les résultats sous forme de fraction, simplifiée ou avec un dénominateur égal à 64.
- 1) Déterminer la loi de probabilité de X et celle de Y .

- 2) Calculer la probabilité des événements suivants :
 $[X = 0] \cap [Y = 0]$, $[X = 0] \cap [Y = 2]$, $[X = 2] \cap [Y = 0]$, $[X = 2] \cap [Y = 2]$
- 3) En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) .
- 4) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
- 5) Calculer la covariance du couple (X, Y) .
- 6) Déterminer la loi de la variable aléatoire $X + Y$.
- 7) Déterminer l'espérance et la variance de la variable aléatoire $X + Y$.

Ex 8 : Dans un bureau de poste, il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité p , ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1 - p$. Les personnes effectuent leur choix de façon indépendante. En une heure, le nombre X de personnes arrivées à la poste suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$ (m étant un réel strictement positif). On désigne par Y le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet.

- 1) Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
- 2) En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) .
- 3) Déterminer la loi de Y . (*On reconnaîtra une loi usuelle*)

Ex 9 : Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue n tirages successifs d'une boule. Pour tout entier k ($1 \leq k \leq n$), on note X_k la variable aléatoire que prend la valeur 1 si l'on tire au k -ième tirage la boule numérotée k et 0 sinon.

- 1) Interpréter la somme : $X = X_1 + X_2 + \dots + X_n$.
- 2) On suppose que les tirages ont lieu avec remise.
 - a. Déterminer l'espérance et la variance de X_k .
 - b. En déduire l'espérance et la variance de X .
- 3) On suppose que les tirages ont lieu sans remise.
 - a. Déterminer l'espérance et la variance de X_k .
 - b. En déduire l'espérance de X .
 - c. Etant donné deux entiers i et j tels que $1 \leq i < j \leq n$, calculer $\text{cov}(X_i, X_j)$.
 - d. En déduire la variance de X .

Ex 10 : (Loi hypergéométrique)

Une urne contient N boules, avec Np de boules rouges et Nq boules vertes. ($0 < q < 1$, $q = 1 - p$)

On tire dans cette urne un échantillon de n boules (tirage simultanée de n boules parmi N).

On note X le nombre de boules rouges contenues dans l'échantillon obtenu.

Le but de cet exercice est de recalculer l'espérance et la variance de X qui suit la loi $\mathcal{H}(N, n, p)$

Pour cela nous numérotions les boules rouges de l'urne de 1 à Np et nous définissons Np variables de Bernoulli $X_1, X_2, \dots, X_{Np}$ de la façon suivante :

$$\forall k \in \llbracket 1, Np \rrbracket, \quad X_k : \begin{cases} \omega \mapsto 1 & \text{si la boule numéro } k \text{ est dans l'échantillon } \omega \\ \omega \mapsto 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- 1) Exprimer X en fonction des variables $X_1, X_2, \dots, X_{Np}$.
- 2) a. Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, Np \rrbracket$, $\mathbb{E}(X_k) = \frac{n}{N}$
 b. En déduire la variance des X_k .
- 3) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, Np \rrbracket^2$, tel que $i \neq j$
 a. Quelle est la loi de $X_i X_j$?
 b. Montrer que : $\mathbb{E}(X_i X_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$
 c. En déduire la covariance du couple (X_i, X_j) .
- 4) a. Calculer l'espérance de X .
 b. Quel est le cardinal de l'ensemble $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq Np\}$
 c. En déduire la somme : $\sum_{1 \leq i < j \leq Np} \text{cov}(X_i, X_j)$.
 d. Calculer enfin la variance de X .