

Correction de la feuille Exo_22 : Théorèmes limites.

Ex 1 : (*non corrigé*)**Ex 2 :** 1) Pour $n \geq 1$, $\frac{S_n}{S_{n-1}}$ suit la loi uniforme sur $\left\{u; \frac{1}{u}\right\}$

Les augmentations/diminutions du prix sont indépendantes (*Pas évident dans l'énoncé mais je m'en suis déjà servi à la question 1.(c)*) ce qui entraînent l'indépendance des $\frac{S_n}{S_{n-1}}$ puis celle des Z_n .

Les (Z_n) sont indépendantes et les Z_n suivent la loi uniforme sur $\{-\ln(u); \ln(u)\}$

$$2) E(Z_n) = 0 \quad \text{et} \quad V(Z_n) = (\ln(u))^2.$$

Ex 3 : 1) Les (Z_n) sont indépendantes et les Z_n suivent la même loi d'espérance 0 et de variance $(\ln(u))^2$ donc (*théorème central limite première forme*)

la suite $\left(\frac{\bar{Z}_n - 0}{\frac{\ln(u)}{\sqrt{n}}}\right)$ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi normale centrée

réduite.

En posant : $\sigma = \ln(u)$ on a bien :
$$\left(\frac{\bar{Z}_n}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}\right) \text{ converge en loi vers une variable aléatoire suivant la loi } \mathcal{N}(0, 1)$$

2) La volatilité (écart-type) est un paramètre de dispersion, lorsqu'elle est élevée cela signifie qu'il peut y avoir de grandes variations du prix du blé au cours du temps.

Ex 4 : 1)

$$\begin{aligned} V(\bar{Z}_n) &= V\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{k=1}^n Z_k\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n V(Z_k) \quad (\text{Indépendance des } Z_k) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sigma^2 \end{aligned}$$

$$V(\bar{Z}_n) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\begin{aligned} V_n &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (Z_i^2 - 2Z_i\bar{Z}_n + \bar{Z}_n^2) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Z_i^2 - 2\bar{Z}_n \sum_{i=1}^n Z_i + n\bar{Z}_n^2 \right) \\ &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n Z_i^2 - n\bar{Z}_n^2 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E(V_n) &= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n E(Z_i^2) - n\overline{E}(Z_n^2) \right) \\
&= \frac{1}{n-1} \left(\sum_{i=1}^n V(Z_i^2) - \sigma^2 \right) \\
&= \frac{1}{n-1} (n\sigma^2 - \sigma^2)
\end{aligned}$$

$$\boxed{E(V_n) = \sigma^2}$$

2) V_n est un estimateur sans biais de $\sigma^2 = (\ln(u))^2$.

3) $U_n = \exp(\sqrt{V_n})$ est un estimateur du paramètre u .

Ex 5 : (*non corrigé*)

Ex 6 : (*non corrigé*)

Ex 7 : (*non corrigé*)

Ex 8 : (*non corrigé*)

Ex 9 : Avec les notation du cours :

$$n = 400, \quad f_n = \frac{206}{400} (\approx 0,515), \quad s_n^2 = f_n(1 - f_n) \quad (\text{calcul fait dans la feuille cours}_{14}).$$

or l'intervalle de confiance asymptotique d'une proportion au niveau de confiance $1 - \alpha$ est

$$IC(1 - \alpha) = \left[F_n - u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{F_n(1 - F_n)}{n}}; F_n + u_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{F_n(1 - F_n)}{n}} \right]$$

Pour $\alpha = 0,05$, on a $u_{1-\alpha/2} \approx 1,96$ donc

$$\boxed{[0,46; 0,57] \text{ est un intervalle de confiance de la proportion de males au niveau de confiance } 95\%}.$$

Ex 10 : 1) Cette expérience est constituée de N épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes (succès : type AA de probabilité p_1) et N_1 est égale au nombre de succès donc

$$\boxed{N_1 \hookrightarrow B(N, p_1)}$$

2) $B(N, p_1)$ est une loi usuelle $E(N_1) = Np_1$ et $V(N_1) = Np_1(1 - p_1)$

3) $N_1 \hookrightarrow B(N, p_1)$ donc le théorème de Moivre-Laplace permet d'affirmer que N_1 converge en loi vers une variable X qui suit la loi $\mathcal{N}(0, 1)$,

autrement dit : pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a \leq b$

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow +\infty} \mathbf{P} \left(a \leq \frac{N_1 - Np_1}{\sqrt{Np_1(1 - p_1)}} \leq b \right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t^2}{2}} dt}$$