

Correction de la feuille Exo_24 : Couples de variables aléatoires discrètes.

Ex 1 : 1) $N(\Omega) = \llbracket 0; 10 \rrbracket$.

$$[N = 0] = \overline{B}_1, \quad [N = 1] = B_1 \cap \overline{B}_2, \quad [N = 2] = B_1 \cap B_2 \cap \overline{B}_3, \quad \dots \quad [N = 9] = B_1 \cap \dots \cap \overline{B}_{10}$$

$$\text{et } [N = 10] = B_1 \cap \dots \cap B_{10}$$

on en déduit la loi de N :

$$\forall n \in \llbracket 0; 9 \rrbracket, \quad P([N = n]) = \left(\frac{2}{3}\right)^n \times \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P([N = 10]) = \left(\frac{2}{3}\right)^{10}$$

2) On utilise ici la variable aléatoire : Y : le nombre de boules blanches portant le numéro 2 tirées au cours de l'expérience. ($X = N + Y$)

(Justification d'une loi conditionnelle)

Pour $n \in \llbracket 0; 10 \rrbracket$,

Si $[N = n]$ est réalisé, (on raisonne avec la probabilité $P_{[N=n]}$)

L'observation des boules blanches est la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

A chacune d'elles, la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro 2 est égale à : $\frac{1}{2}$.

Y est le nombre de boules portant le numéro 2, donc $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n; \frac{1}{2}\right)$ (pour $P_{[N=n]}$)

On en déduit :

Sachant $[N = n]$ les valeurs prises par X sont : $\llbracket n; 2n \rrbracket$

$$\text{et pour tout } k \in \llbracket n; 2n \rrbracket, \quad P_{[N=n]}([X = k]) = \binom{n}{k-n} \frac{1}{2^n}$$

Pour cette probabilité l'espérance de Y vaut : $\frac{n}{2}$ et comme : $X = N + Y$ on obtient :

$$\text{L'espérance de la loi conditionnelle de } X \text{ sachant } [N = n] \text{ est égale à } \frac{3n}{2}$$

3) (Calcul de l'espérance avec les espérances conditionnelles)

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{20} k P([X = k]) \\ &= \sum_{k=0}^{20} k \sum_{n=0}^{10} P([N = n]) P_{[N=n]}([X = k]) && \text{Formule des probabilités totales} \\ &= \sum_{n=0}^{10} P([N = n]) \sum_{k=0}^{20} k P_{[N=n]}([X = k]) \\ &= \sum_{n=0}^{10} P([N = n]) \underbrace{\sum_{k=0}^n k P_{[N=n]}([X = k])}_{\frac{3}{2}n} \\ &= \frac{3}{2} \sum_{n=0}^{10} n P([N = n]) \\ &= \frac{3}{2} E(N) \end{aligned}$$

$$\text{On remarquera la relation (hors programme) : } E(X) = \sum_{n=0}^{10} P([N = n]) E_{(N=n)}(X)$$

$$\begin{aligned}
E(N) &= \sum_{k=0}^{10} kP(N=k) \\
&= \sum_{i=1}^9 i \left(\frac{2}{3}\right)^i \times \frac{1}{3} + 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{i=1}^9 \sum_{j=1}^i \left(\frac{2}{3}\right)^i + 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^9 \sum_{i=j}^n \left(\frac{2}{3}\right)^i + 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\
&= \frac{1}{3} \sum_{j=1}^9 \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^j - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}}{1 - \frac{2}{3}} + 10 \left(\frac{2}{3}\right)^{10} \\
&= \sum_{j=1}^{10} \left(\frac{2}{3}\right)^j \\
&= 2 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{11}
\end{aligned}$$

or $E(X) = \frac{3}{2}E(N)$

L'espérance de X est égale à : $3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{10}\right) = \frac{58025}{19683} \approx 2,948$

Ex 2 : 1) Cette expérience est la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes avec pour succès : "la personne choisit l'hôtel H_1 ", la probabilité du succès est égale à : $\frac{1}{3}$.

X_1 est égal au nombre de succès donc $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ et ainsi $E(X_1) = \frac{n}{3}$ et $V(X_1) = \frac{2n}{9}$

On démontre de même pour $i = 2, 3$: $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{3})$ et ainsi $E(X_i) = \frac{n}{3}$ et $V(X_i) = \frac{2n}{9}$

2) Cette expérience est la succession de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes avec pour succès : "la personne choisit l'hôtel H_1 ou H_2 ", la probabilité du succès est égale à : $\frac{2}{3}$.

$X_1 + X_2$ est égal au nombre de succès donc $X_1 + X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{2}{3})$ et ainsi $E(X_1 + X_2) = \frac{2n}{3}$ et $V(X_1 + X_2) = \frac{2n}{9}$

3) $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + 2\text{cov}(X_1, X_2) + V(X_2)$ donc

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X_1, X_2) &= \frac{1}{2} (V(X_1 + X_2) - V(X_1) - V(X_2)) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2n}{9} - \frac{2n}{9} - \frac{2n}{9} \right) \\
&= -\frac{n}{9}
\end{aligned}$$

et ainsi le coefficient de corrélation est :

$$\begin{aligned}
\rho(X_1, X_2) &= \frac{\text{cov}(X_1, X_2)}{\sqrt{V(X_1)}\sqrt{V(X_2)}} \\
&= \frac{-\frac{n}{9}}{\frac{2n}{9}} \\
&= -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ce coefficient de corrélation est négatif, en effet quand le nombre de personnes ayant choisi H_1 est grand alors le nombre de personnes choisissant H_2 est petit.

Ex 3 : 1) A et B sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson donc $X = A + B$ suit la loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, on a donc $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

On raisonne de même pour montrer que $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

2) X et Y admettent des variance donc le couple (X, Y) admet une covariance ,
et

$$\begin{aligned} \text{cov}(X, Y) &= \text{cov}(A + B, B + C) \\ &= \text{cov}(A, B) + \text{cov}(A, C) + \text{cov}(B, B) + \text{cov}(B, C) && \text{bilinéarité} \\ &= V(B) && \text{indépendance} \\ &= \mu \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{cov}(X, Y) = \mu}$$

Ex 4 : (*non corrigé*)

Ex 5 : (*non corrigé*)

Ex 6 : (*non corrigé*)

Ex 7 : (*non corrigé*)

Ex 8 : (*non corrigé*)

Ex 9 : (*non corrigé*)

Ex 10 : 1) X est le nombre de k pour lesquels $(X_k = 1)$ donc

$$\boxed{X = \sum_{k=1}^{Np} X_k}$$

2) a. Soit $k \in \llbracket 1, Np \rrbracket$,

l'expérience consiste à tirer simultanément n jetons dans l'urne,

la probabilité d'obtenir le jeton k vaut : $P(X_k = 1) = \frac{\binom{N-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n}{N}$

donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n}{N}\right)$ et

$$\boxed{E(X_k) = \frac{n}{N}}$$

b. $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n}{N}\right)$ donc

$$\boxed{\text{la variance de } X_k \text{ est égale à } V(X_k) = \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right)}$$

3) Soit $(i, j) \in \llbracket 1, Np \rrbracket^2$, tel que $i \neq j$

a. Les valeurs prises par $X_i X_j$ sont 0 et 1 donc $X_i X_j$ suit une loi de Bernoulli.

de plus $P((X_i = 1) \cap (X_j = 1)) = \frac{\binom{N-2}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}$

donc

$$\boxed{X_i X_j \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{n(n-1)}{N(N-1)}\right)}$$

b. On en déduit tout de suite :

$$\boxed{E(X_i X_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)}}$$

c. Or $\text{cov}(X_i, X_j) = E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j) = \frac{n(n-1)}{N(N-1)} - \left(\frac{n}{N}\right)^2$

$$\boxed{\text{cov}(X_i, X_j) = \frac{n(n-N)}{N^2(N-1)}}$$

4) a. $X = \sum_{k=1}^{Np} X_k$ donc $E(X) = \sum_{k=1}^{Np} E(X_k) = \sum_{k=1}^{Np} \frac{n}{N}$. $\boxed{E(X) = np}$

b. Il y a autant d'éléments dans $\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq Np\}$ que de parties à deux éléments de $\llbracket 1, Np \rrbracket$ donc

$$\boxed{\text{card}(\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq Np\}) = \binom{Np}{2} = \frac{Np(Np-1)}{2}}$$

c. $\text{cov}(X_i, X_j)$ ne dépend pas de (i, j) lorsque $i < j$ donc

$$\sum_{1 \leq i < j \leq Np} \text{cov}(X_i, X_j) = \text{card}(\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid 1 \leq i < j \leq Np\}) \times \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{Np(Np-1)}{2} \times \frac{n(n-N)}{N^2(N-1)}$$

$$\boxed{\sum_{1 \leq i < j \leq Np} \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{p(Np-1)n(n-N)}{2N(N-1)}}$$

d. On en conclut :

$$\begin{aligned} V\left(\sum_{i=1}^{Np} X_i\right) &= \sum_{i=1}^{Np} \frac{n}{N} \left(1 - \frac{n}{N}\right) + 2 \frac{p(Np-1)n(n-N)}{2N(N-1)} \\ &= Np \times \frac{n}{N^2} (N-n) + \frac{np(Np-1)(n-N)}{N(N-1)} \\ &= \frac{np(N-n)}{N} \left(1 - \frac{Np-1}{N-1}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{V\left(\sum_{i=1}^{Np} X_i\right) = np(1-p) \frac{N-n}{N-1}}$$