

Feuille Exo.26 : Orthogonal d'un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et projection orthogonale.

Ex 1 : 1) Soit $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 3y = 0\}$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 2)$ sur F . Faire une illustration graphique.

2) Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$

Déterminer le projeté orthogonal de $u = (1, 2, 1)$ sur F .

Ex 2 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

1) $\dim(\text{Im}(A)) = \dim((\text{Ker}(A))^\perp)$

2) Montrer que si $A = A^T$ alors $\text{Im}(A) = (\text{Ker}(A))^\perp$ (Commencer par montrer $\text{Im}(A) \subset (\text{Ker}(A))^\perp$)

3) En déduire que si $A = A^T$ et $A^2 = A$ alors A est la matrice d'une projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$

Ex 3 : 1) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y, x + y)$

Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à déterminer.

2) Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par $f(x, y, z) = \frac{1}{9}(5x + 4y - 2z, 4x + 5y + 2z, -2x + 2y + 8z)$

Montrer que f est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel à déterminer.

Ex 4 : On note (E_i) la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1) Montrer que pour tout $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et pour tout (i, j) , $(E_i^T M E_j) = m_{i,j}$

2) En déduire pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que : si $\left(\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2 \quad X^T M Y = 0 \right)$ alors $M = 0_{n \times n}$.

3) (*) On suppose que $A^2 = A$ et que $\text{Im}(A) = (\text{Ker}(A))^\perp$,

Le but de cette question est de montrer que A est symétrique.

Soit $(X, Y) \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})^2$

a. Montrer que : $Y - AY \in \text{Ker}(A)$.

b. En déduire que $(AX)^T(Y - AY) = 0$, puis que $X^T A^T Y = X^T A^T AY$

c. Montrer que $Y^T A^T X = Y^T A^T AX$

d. Conclure. (On pourra utiliser le résultat de la question 2)

Ex 5 : Soit p une projection orthogonale sur F un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

On rappelle que $p \circ p = p$, $\text{Im}(p) = F$ et $\text{Ker}(p) = F^\perp$.

1) Montrer que le spectre de p est inclus dans $\{0, 1\}$.

On suppose dans la suite que $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$ ne sont pas réduit au vecteur nul.

2) En déduire que les sous-espaces propres de p sont $\text{Ker}(p)$ et $\text{Im}(p)$.

On rappelle que tout sous-espace propre de $\mathbb{R}^n$ possède une base orthonormée.

3) En déduire que p est diagonalisable dans une base orthonormée.

4) On note M la matrice de p dans la base canonique, montrer que M est symétrique.

Ex 6 : 1) Dans tous les cas suivants déterminer une base de F et de $F^\perp$.

$$F_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - z = 0\} \quad F_2 = \text{vect}((1, 2, 1)) \quad F_3 = \text{vect}((1, 0, 1), (1, -1, 0))$$

$$F_4 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = 0\} \quad F_5 = \text{vect}((0, 2, 3)) \quad F_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = 0 \text{ et } z = 0\}$$

2) Dans les 6 cas précédents, déterminer une base orthonormale de F et de $F^\perp$.

3) Déterminer la matrice de la projection orthogonale p_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4) Diagonaliser p_F .

5) Diagonaliser p_F dans une base orthonormale.

Ex 7 : (Extrait de G2E 2017)

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère f l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice : $A = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

- 1) a. Déterminer $\text{Ker } f$ (en donner une base) puis démontrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^3, f(x) - x \in \text{Ker } f$
 b. Déterminer $\text{Im } f$ et justifier que $\text{Im } f$ est un plan $\mathcal{P}$ dont on donnera une équation cartésienne et un vecteur normal.
 c. En déduire que f est la projection orthogonale sur $\mathcal{P}$.
- 2) Soit $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
 a. Calculer la distance de x au plan $\mathcal{P}$ et en déduire que : $\frac{|2x_1 - x_2 + x_3|}{\sqrt{6}} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.
 b. Retrouver le résultat avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Ex 8 : Soient $u = (y_1, \dots, y_n)$, $v_1 = (1, \dots, 1)$ et $v_2 = (x_1, \dots, x_n)$ tels que (v_1, v_2) est une famille libre, on note F le plan $\text{vect}(v_1, v_2)$.

Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du projeté orthogonal de $p_F(u)$ sur F dans la base (v_1, v_2) .

Autrement dit : Déterminer le couple de réels (a, b) tel que $p_F(u) = av_1 + bv_2$.

Ex 9 : (D'après MCR 2024)

On se donne trois entiers naturels non nuls n, p et q .

- 1) Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$. Justifier que $(AB)^T = B^T A^T$.
- 2) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Prouver que si M est inversible, alors M^T aussi et que l'on a :

$$(M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$$

- 3) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Prouver que le noyau de A est égal au noyau de $A^T A$.
Indication : on pourra étudier la quantité $X^T A^T A X$ lorsque $X \in \text{Ker}(A^T A)$.
- 4) Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Justifier que $A^T A$ est diagonalisable.

On considère pour toute la suite une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

On suppose que les colonnes de A que l'on notera $C_1, C_2, \dots, C_p$ forment une famille libre.

- 5) Donner la définition de la liberté de la famille $(C_1, \dots, C_p)$ et en déduire que le noyau de A est réduit au vecteur nul, puis que la matrice $A^T A$ est inversible.
- 6) On considère la matrice $H = A(A^T A)^{-1} A^T$.
 a. Prouvez que $H^2 = H$ et $H^T = H$.
 b. Prouvez que $\text{Ker}(H) = (\text{Im}(H))^\perp$.
Indication : On pourra commencer par montrer qu'ils ont même dimension.
 c. Prouvez que $\text{Ker}(H) = \text{Ker}(A^T)$ puis que $\text{Im}(H) = \text{Im}(A)$.

Indication : On raisonnera par double inclusion.

- 7) En déduire que l'application $p : \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}), X \mapsto HX$ est la projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ que l'on précisera.

8) Application.

Soient $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ tels que (V_1, V_2) est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On note F le plan $\text{vect}(V_1, V_2)$ et p_F la projection orthogonale sur F .

On notera :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k, \quad \sigma^2(x) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k^2 \right) - \bar{x}^2 \quad \text{et} \quad \text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n x_k y_k \right) - \bar{x} \bar{y}$$

- a. Déterminer les coordonnées de $p_F(Y)$ dans la base (V_1, V_2) de F .
 On notera (a, b) tel que : $p_F(Y) = aV_1 + bV_2$.
- b. Faire le lien avec la régression linéaire entre deux séries statistiques.