

Ex 1 : (G2E 2024)

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel non nul.

On se place dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique noté $(\cdot | \cdot) : (x | y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

On confondra les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et les matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice, sa transposée est notée $A^\top$. Si E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, son supplémentaire orthogonal est noté $E^\perp$.

On note :

$$S_n^+(\mathbb{R}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mid A^\top = A \text{ et } \text{sp}(A) \subset \mathbb{R}^+\}.$$

L'objectif de ce problème est de démontrer l'appartenance à $S_n^+(\mathbb{R})$ de certaines matrices.

Partie A : Quelques exemples

1) Préciser, en justifiant, parmi les matrices suivantes celles qui appartiennent à $S_2^+(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 4 \end{pmatrix}.$$

2) On considère, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices $M(a, b)$ définies par :

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{pmatrix}, \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

- Montrer que cet ensemble est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, engendré par une famille que l'on précisera. Déterminer sa dimension.
- Déterminer deux vecteurs propres de $M(a, b)$ de la forme $(1, y, 1)$, puis un troisième vecteur propre orthogonal aux deux précédents.
- En déduire qu'il existe un réel $r > 0$ et une matrice P inversible telle que $P^\top = P^{-1}$ et :

$$M(a, b) = P \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a + br & 0 \\ 0 & 0 & a - br \end{pmatrix} P^\top.$$

- Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que $M(a, b)$ appartienne à $S_3^+(\mathbb{R})$.

Partie B : Matrice de Gram

Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ et $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$.

On appelle **matrice de Gram** la matrice :

$$G = ((e_i | e_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1) a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x \in E^\perp \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, (x | e_i) = 0.$$

b. En déduire que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$(x_1, \dots, x_n) \in \ker(G) \iff \sum_{i=1}^n x_i e_i \in E^\perp.$$

c. En déduire que la famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre si et seulement si G est inversible.

2) On cherche à montrer que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$.

On pose $X = (x_1, \dots, x_n)^\top$.

a. Calculer GX et montrer que :

$$X^\top GX = (x_0 | x_0)$$

où x_0 est un vecteur de $\mathbb{R}^n$ que l'on précisera.

b. Soit $\lambda \in \text{sp}(G)$ et X un vecteur propre associé.

En calculant de deux façons $X^\top GX$, montrer que $\lambda \geq 0$.

c. Conclure que $G \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Partie C : Matrice de covariance

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires réelles telles que toutes les covariances existent.

On rappelle :

$$\text{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}(X_i X_j) - \mathbb{E}(X_i)\mathbb{E}(X_j).$$

On appelle **matrice de covariance** :

$$\Sigma = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

- 1) a. Montrer que pour tous i, j, k et tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{Cov}(X_i, X_j + xX_k) = \text{Cov}(X_i, X_j) + x \text{Cov}(X_i, X_k).$$

- b. En déduire que pour tout i et tout $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{Cov}\left(X_i, \sum_{j=1}^n x_j X_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j \text{Cov}(X_i, X_j).$$

- 2) a. Justifier que Σ est symétrique.

- b. En s'inspirant de la partie B, montrer que $\Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Ex 2 : (Oral-Agro 2024 - sans les questions Python)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ muni de son produit scalaire usuel noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de sa norme associée $\| \cdot \|$.

Soit $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Pour toute famille $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on définit la **matrice de Gram** associée par : $G = (\langle u_i, u_j \rangle)_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

- 1) Justifier que la matrice de Gram d'une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est diagonalisable.

- 2) Soit $(u_1, \dots, u_p)$ une famille de $\mathbb{R}^n$ et G sa matrice de Gram.

- a. On suppose que G est inversible.

Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_p \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k = 0$. On pose $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$.

Montrer que $GX = 0$, puis en déduire que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

- b. On suppose que $(u_1, \dots, u_p)$ est libre.

Soit $X = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}$ tel que $GX = 0$.

- i. Montrer que pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$: $\left\langle u_i, \sum_{k=1}^p \alpha_k u_k \right\rangle = 0$.

- ii. En déduire que $\sum_{k=1}^p \alpha_k u_k = 0$.

- iii. Conclure que $X = 0$, puis que G est inversible.

- 3) Soit $(v_1, \dots, v_n)$ une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \|v_i\| = 1 \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, \quad \|v_i - v_j\| = 1.$$

- a. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^n$: $\|a - b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\langle a, b \rangle$.

- b. En déduire la matrice de Gram G de la famille $(v_1, \dots, v_n)$.

- c. On pose $A = 2G$. Calculer A^2 en fonction de n , A et I_n .

- d. En déduire que A est inversible.

- e. Conclure que $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.