

Ex 1 : MCR 2023 Autour de la loi de Poisson

Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs et $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que, pour tout entier n , T_n suit une loi de Poisson de paramètre t_n .

- 1) Donner sans justification l'espérance et la variance de T_1 .
- 2) Déterminer la loi de $T_1 + T_2$. On attend une démonstration.
- 3) Montrer que, pour tout entier n non nul, $\sum_{k=1}^n T_k$ suit une loi de Poisson de paramètre $\sum_{k=1}^n t_k$.

Ex 2 : Dans une boulangerie le nombre de clients N le dimanche matin suit une loi de Poisson de paramètre λ . Chacun des clients a une probabilité p de prendre au moins un croissant. On note X le nombre de clients prenant au moins un croissant et $Y = N - X$ pour ceux qui n'en prennent pas.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}$, quelle est la loi de X sachant $(N = n)$?
- 2) En déduire la loi de X .
- 3) Quelle est la loi de Y ?
- 4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- 5) Calculer $\text{cov}(X, N)$ en déduire $E(XN)$.

Ex 3 : Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n .

On tire successivement sans remise deux jetons de cette urne. On note X le maximum des deux numéros obtenus et Y le minimum.

- 1) Quelle est la loi conjointe du couple (X, Y) ?
- 2) Déterminer la loi de X et celle de Y .
- 3) Déterminer l'espérance de X et de Y . (Donner deux méthodes puis en choisir une)

Ex 4 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p_1)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{G}(p_2)$

- 1) Déterminer la loi de $Z_1 = \max(X, Y)$.
- 2) Déterminer la loi de $Z_2 = \min(X, Y)$.
- 3) Déterminer la loi de $Z_3 = X + Y$.
- 4) Calculer l'espérance de ces trois variables aléatoires.

Ex 5 : Dans un bureau de poste, il y a deux guichets. Chacune des personnes arrivant à la poste choisit le premier guichet avec une probabilité p , ou le deuxième guichet avec une probabilité $q = 1 - p$. Les personnes effectuent leur choix de façon indépendante. En une heure, le nombre X de personnes arrivées à la poste suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(m)$ (m étant un réel strictement positif). On désigne par Y le nombre de personnes ayant choisi le premier guichet.

- 1) Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, la loi conditionnelle de Y sachant $[X = n]$.
- 2) En déduire la loi conjointe du couple (X, Y) .
- 3) Déterminer la loi de Y . (On reconnaîtra une loi usuelle)

Ex 6 : On lance n dés pipés donnant le chiffre ⑥ avec la probabilité $p \in]0, 1[$.

A chaque lancer, on met de côté ceux qui ont donné ⑥ et on relance les autres ; on arrête une fois que tous les dés ont fait ⑥.

Notons : X_1 la variable aléatoire égale au nombre de 6 obtenus au premier lancer,

X la variable aléatoire égale au nombre de lancers effectués et

Y celle égale au nombre de dés lancés au total.

- 1) Déterminer la loi de X_1 . Quelles sont son espérance et sa variance ?
- 2) Déterminer la loi de X .
- 3) Déterminer $E(Y)$, puis la loi de Y .

Indication pour la loi de X et celle de Y :

utiliser les variables aléatoires T_k : Rang d'apparition du premier ⑥ avec le k -ième dé.

Réponse pour la loi de Y : $Y(\Omega) = \llbracket n; +\infty \rrbracket$ et pour tout $k \geq n$, $P(Y = k) = \binom{k-1}{n-1} p^n (1-p)^{k-n}$