

Attention : **PAS DE COLLE** la semaine du 30/03/26, sauf rattrapage.

- **Produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.**

Orthogonal $F^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$.

L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et,

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe un unique couple $(x_F, x_{F^\perp}) \in F \times F^\perp$ vérifiant $x = x_F + x_{F^\perp}$.

x_F est alors le projeté orthogonal de x sur F et $x_{F^\perp}$ est alors le projeté orthogonal de x sur $F^\perp$.

On appelle projection orthogonale sur le sous-espace F de $\mathbb{R}^n$ l'application p qui à tout $x \in \mathbb{R}^n$ associe x_F .

Propriétés : $F \cap F^\perp = \{0_E\}$. $(F^\perp)^\perp = F$

La projection orthogonale sur le sous-espace F est l'endomorphisme p de $\mathbb{R}^n$ vérifiant :

$$p \circ p = p, \quad \text{Im}(p) = F \quad \text{et} \quad \text{Ker}(p) = F^\perp.$$

Relation : $\dim(F) + \dim(F^\perp) = n$.

Écriture du projeté orthogonal d'un vecteur de $\mathbb{R}^n$ dans une base orthonormale de F .

La diagonalisation d'une projection orthogonale a été vue en exercice, mais n'est pas un objectif du programme.

Distance entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Définition de la distance d'un vecteur à une partie non vide de $\mathbb{R}^n$.

Théorème : distance d'un vecteur à un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, interprétation en termes de projection orthogonale.

- **Couples de variables aléatoires discrètes.**

Loi conjointe. Lois marginales. Lois conditionnelles.

Théorème de transfert : espérance de $u(X, Y)$. (on ne traitera que le cas $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ sont finis).

Exemples de recherche de la loi de $u(X, Y)$, le couple ayant une loi conjointe connue.

En particulier $\min(X, Y)$, $\max(X, Y)$, $X + Y$.

Somme de deux variables aléatoires discrètes à valeurs dans $\mathbb{N}$. (pas nécessairement indépendantes).

Loi de la somme de deux variables indépendantes suivant des lois de Poisson.

Covariance. Propriétés. Variance de $X + Y$.

- **Théorèmes limites.**

Inégalité de Markov. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Loi faible des grands nombres. (La notion de convergence en probabilité n'est pas au programme de BCPST)

Théorème central limite (deuxième forme). $\left(\frac{M_n - \mu}{\frac{S_n}{\sqrt{n}}} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

l'écart-type empirique corrigée $S'_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - M_n)^2}$ (savoir montrer que $E(S_n'^2) = \sigma^2$)

Théorème central limite (deuxième forme, deuxième version). $\left(\frac{M_n - \mu}{\frac{S'_n}{\sqrt{n}}} \right)_{n \geq 1} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$

(Nous avons fait le lien avec la loi de Student et les intervalles de confiance)

Nous avons vu la notion d'intervalle de confiance asymptotique, mais elle n'apparaît pas dans le programme de BCPST.

Il manque le test de conformité à la moyenne.

- **Statistiques.**

Principe de la régression linéaire. Meilleure approximation affine par la méthode des moindres carrés.

Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2. La démonstration n'est pas exigible.

Les coefficients de la droite de meilleure approximation au sens des moindres carrés devront être rappelés.