

Feuille Cours_13.2 : Distance d'un vecteur à une partie de $\mathbb{R}^n$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on notera E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$.

Ex 1 : 1) Déterminer la distance des vecteurs u et v dans les cas suivants :

- a. $u = (1, 2, 3)$ et $v = (1, 0, 2)$.
- b. $u = (1, 0, 0, 4)$ et $v = (1, 1, 0, 2)$.

2) Montrer que : pour tout $(u, v, w) \in E^3$, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Ex 2 : On se place dans $\mathbb{R}^2$, on note $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + 2y = 1\}$ et $u = (3, 1)$

- 1) D est-il un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$?
- 2) Déterminer une représentation paramétrique de D .
- 3) En déduire la distance de u à D .

Ex 3 : Dans tous les cas suivants déterminer la distance de u à F .

- 1) Dans $\mathbb{R}^2$, en prenant $u = (1, 2)$ et $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x\}$
- 2) Dans $\mathbb{R}^2$, en prenant $u = (2, -1)$ et $F = \text{Vect} < (2, 1) >$
- 3) Dans $\mathbb{R}^3$, en prenant $u = (1, 0, -1)$ et $F = \text{Vect} < (0, 1, 3) >$.
- 4) Dans $\mathbb{R}^3$, en prenant $u = (1, 0, -1)$ et $F = \text{Vect} < (0, 1, 3), (1, 1, 1) >$
- 5) Dans $\mathbb{R}^4$, en prenant $u = (1, 2, 0, 1)$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z = 0 \text{ et } 2x + t = 0\}$
- 6) Dans $\mathbb{R}^3$, en prenant $u = (1, 0, 1)$ et $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 4z = 0 \text{ et } x + y + z = 0\}$
- 7) Dans $\mathbb{R}^4$, en prenant $u = (2, 1, 0, 1)$ et $F = \text{vect}((1, 0, 1, 0), (0, 1, 0, 1))$

Ex 4 : Distance à la sphère unité de $\mathbb{R}^n$.

Soit n un entier naturel non nul, on note : $S_n = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1 \right\}$

Le but de cet exercice est de déterminer la distance d'un vecteur x quelconque de $\mathbb{R}^n$ à S_n .

- 1) Montrer que pour tous x et y des vecteurs de $\mathbb{R}^n$:

$$(\|x\| - \|y\|)^2 \leq \|x - y\|^2$$

- 2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $u \in S_n$, $\|x - u\| \geq \left| \|x\| - 1 \right|$
- 3) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $d(x, S_n) = \left| \|x\| - 1 \right|$
- 4) Illustrer ce résultat pour $n = 2$.

Ex 5 : On note f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = (2 + x + 2y)^2 + (1 - 2x)^2 + (1 + 2y)^2 + (3 + 2x - y)^2$$

On note : $a = (-2, 1, 1, 3)$, $u_1 = (1, 2, 0, -2)$, $u_2 = (2, 0, -2, 1)$ et $F = \text{Vect}(u_1, u_2)$

- 1) Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a $f(x, y) = \|a - (xu_1 + yu_2)\|^2$.
- 2) En déduire que la fonction de f admet un minimum atteint en un unique couple (x_0, y_0) que l'on déterminera, et préciser la valeur de ce minimum.

Extrait du programme : Interprétation de l'ajustement affine par la méthode des moindres carrés en termes de projection sur un sous-espace de dimension 2.

La démonstration n'est pas exigible. Les coefficients de la droite de meilleure approximation au sens des moindres carrés devront être rappelés.

Ex 6 : Soient $u = (y_1, \dots, y_n)$, $v_1 = (1, \dots, 1)$ et $v_2 = (x_1, \dots, x_n)$ tels que (v_1, v_2) est une famille libre, on note F le plan $\text{vect}(v_1, v_2)$.

Déterminer les coordonnées $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ du projeté orthogonal de $p_F(u)$ sur F dans la base (v_1, v_2) .

Autrement dit : Déterminer le couple de réels (a, b) tel que $p_F(u) = av_1 + bv_2$.

Ex 7 : Soient $u = (y_1, \dots, y_n)$, $v_1 = (1, \dots, 1)$ et $v_2 = (x_1, \dots, x_n)$ tels que (v_1, v_2) est une famille libre de $\mathbb{R}^n$, on note F le plan $\text{vect}(v_1, v_2)$.

1) On se place dans un repère du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on considère un vecteur $v = (z_1, \dots, z_n)$ de F , Que peut-on dire des points $M_k(x_k, z_k)$ pour k allant de 1 à n ?

2) Quel est le vecteur v_0 de F qui réalise le minimum de : $F \longrightarrow \mathbb{R} \quad ?$
 $v \longmapsto \|v - u\|$

On note $(a_0, b_0) \in \mathbb{R}$ tel que $v_0 = a_0 v_1 + b_0 v_2$ (ce sont les coordonnées de v_0 dans la base (v_1, v_2) de F).
 et on appelle droite de régression linéaire la droite d'équation $y = a_0 + b_0 x$.

3) Déterminer une base orthogonale de F .

4) On note $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$, $\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k$, $\sigma^2(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})^2$ et $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y})$

a. Montrer que : $\text{cov}(x, y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k (x_k - \bar{x})$

b. Montrer que :

$$a_0 = \bar{y} - b_0 \bar{x} \quad \text{et} \quad b_0 = \frac{\text{cov}(x, y)}{\sigma^2(x)}$$

5) On note $f : (a, b) \longmapsto \sum_{k=1}^n (y_k - bx_k - a)^2$.

a. Montrer que f admet un minimum en (a_0, b_0) ?

b. Expliquer comment retrouver les résultats de la question 4) b).

Ex 8 : (Une autre approche de la droite de régression linéaire.)

On considère un nuage de points :

valeurs du premier caractère	x_1	x_2	$\dots$	x_n
valeurs du deuxième caractère	y_1	y_2	$\dots$	y_n

On suppose qu'au moins un des x_i est différent de $\bar{x}$.

On cherche à trouver le couple $(\hat{a}, \hat{b})$ qui minimise $(a, b) \longmapsto F(a, b) = \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b)^2$

1) Illustrer graphiquement le but de cet exercice.

2) On fixe a dans $\mathbb{R}$ et on note : $f : b \longmapsto F(a, b)$ (fonction partielle de F) .

Montrer qu'en posant : $\hat{b} = \bar{y} - a\bar{x}$ on a : $\forall b \in \mathbb{R}, f(b) \geq f(\hat{b})$

3) On note : $g : a \longmapsto F(a, \hat{b})$

Montrer qu'en posant : $\hat{a} = \frac{\text{cov}(x, y)}{\text{cov}(x, x)}$ on a : $\forall a \in \mathbb{R}, g(a) \geq g(\hat{a})$

4) Conclure