

Partie 1

A. Etude des variables X_i .

- 1) Cette expérience est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes ; le succès étant : "obtenir une boule de couleur C_i " qui a pour probabilité p_i . X_i étant le nombre de succès on peut affirmer que :

$$X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i)$$

On connaît l'espérance et la variance de cette loi usuelle :

$$E(X_i) = np_i \quad \text{et} \quad V(X_i) = np_i(1 - p_i)$$

- 2) a) On raisonne comme dans la première question avec pour succès : "obtenir une boule de couleur C_i ou C_j " qui a pour probabilité $p_i + p_j$

$$X_i + X_j \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p_i + p_j)$$

On en déduit sa variance

$$V(X_i + X_j) = n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j)$$

- b) On sait que $V(X_i + X_j) = V(X_i) + 2 \operatorname{cov}(X_i, X_j) + V(X_j)$ donc

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}(X_i, X_j) &= \frac{1}{2} (V(X_i + X_j) - V(X_i) - V(X_j)) \\ &= \frac{1}{2} (n(p_i + p_j)(1 - p_i - p_j) - np_i(1 - p_i) - np_j(1 - p_j)) \\ &= \frac{1}{2} (np_i(1 - p_i - p_j) + np_j(1 - p_i - p_j) - np_i(1 - p_i) - np_j(1 - p_j)) \\ &= \frac{1}{2} (-np_i p_j - np_j p_i) \end{aligned}$$

$$\operatorname{cov}(X_i, X_j) = -np_i p_j$$

B. Remarquons que, ici, avec $s = 2$: $X_1 + X_2 = n$, $p_1 + p_2 = 1$

1)

$$\begin{aligned} U_n &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_2 - np_2)^2}{np_2} \\ &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(n - X_1 - n(1 - p_1))^2}{np_2} \\ &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1} + \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_2} \\ &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{n} \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \right) \\ &= \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1 p_2} \quad \text{car } p_1 + p_2 = 1 \end{aligned}$$

donc

$$U_n = Z_1^2 \quad \text{où} \quad Z_1 = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1 p_2}}$$

- 2) X_1 suit la loi binomiale de paramètres (n, p_1) donc X_1^* converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(Théorème de Moivre-Laplace)

$$\text{Or } Z_1 = \frac{(X_1 - np_1)^2}{np_1 p_2} = \frac{X_1 - np_1}{\sqrt{np_1(1 - p_1)}} = X_1^*$$

Pour n assez grand, la loi de Z_1 peut être approchée par la loi centrée réduite

C. $s = 3$

1)

$$\begin{aligned}
 U_n &= \frac{(X_1 - \frac{n}{4})^2}{\frac{n}{4}} + \frac{(X_2 - \frac{n}{4})^2}{\frac{n}{4}} + \frac{(X_3 - \frac{n}{2})^2}{\frac{n}{2}} \\
 &= \frac{4}{n} \left(\left(X_1 - \frac{n}{4}\right)^2 + \left(X_2 - \frac{n}{4}\right)^2 \right) + \frac{2}{n} \left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{2}{n} \left((X_1 - X_2)^2 + \left(X_1 + X_2 - \frac{n}{2}\right)^2 \right) + \frac{2}{n} \left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2 \quad \text{En utilisant } a^2 + b^2 = \frac{1}{2}((a+b)^2 + (a-b)^2) \\
 &= \frac{2}{n} \left((X_1 - X_2)^2 + \left(\frac{n}{2} - X_3\right)^2 \right) + \frac{2}{n} \left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2 \\
 &= \frac{4}{n} \left(X_3 - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{2}{n} (X_1 - X_2)^2 \\
 &= Z_1^2 + Z_2^2
 \end{aligned}$$

On a bien :

$$\boxed{U_n = Z_1^2 + Z_2^2}$$

$$2) \quad Z_1 = \frac{2}{\sqrt{n}} \left(X_3 - \frac{n}{2}\right) \quad \text{et} \quad Z_2 = \sqrt{\frac{2}{n}} (X_1 - X_2)$$

- la linéarité de $E(\cdot)$ donne : $E(Z_1) = \frac{2}{\sqrt{n}} \left(E(X_3) - \frac{n}{2}\right)$ et $E(Z_2) = \sqrt{\frac{2}{n}} (E(X_1) - E(X_2))$
et on sait de plus que $X_1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$, $X_2 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{4})$ et $X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ donc

$$\boxed{E(Z_1) = 0 \quad \text{et} \quad E(Z_2) = 0}$$

- la propriété $V(aX + b) = a^2 V(X)$ donne : $V(Z_1) = \frac{4}{n} V(X_3)$ et comme $X_3 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$ il vient :

$$\boxed{V(Z_1) = 1}$$

$$\begin{aligned}
 V(Z_2) &= \frac{2}{n} V(X_1 - X_2) \\
 &= \frac{2}{n} (V(X_1) - 2\text{cov}(X_1, X_2) + V(X_2)) \\
 &= \frac{2}{n} \left(\frac{3n}{16} + 2\frac{n}{16} + \frac{3n}{16} \right) \quad (\text{d'après la question A 2)b) pour la covariance)
 \end{aligned}$$

$$\boxed{V(Z_2) = 1}$$

•

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(Z_1, Z_2) &= \text{cov} \left(\frac{2}{\sqrt{n}} \left(X_3 - \frac{n}{2}\right); \sqrt{\frac{2}{n}} (X_1 - X_2) \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{n} \text{cov} \left(X_3 - \frac{n}{2}; X_1 - X_2 \right) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{n} \text{cov}(X_3; X_1 - X_2) \\
 &= \frac{2\sqrt{2}}{n} (\text{cov}(X_3; X_1) - \text{cov}(X_3; X_2))
 \end{aligned}$$

or d'après la question 2)c) : $\text{cov}(X_3; X_1) = \text{cov}(X_3; X_2)$ donc

$$\boxed{\text{cov}(Z_1; Z_2) = 0}$$

3) X_3 suit la loi binomiale de paramètres $(n, \frac{1}{2})$ donc X_3^* converge en loi vers la loi normale centrée réduite.

(Théorème de Moivre-Laplace)

$$\text{Or } Z_1 = \frac{X_3 - \frac{n}{2}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} = X_3^*$$

Pour n assez grand, la loi de Z_1 peut être approchée par la loi centrée réduite

4) a) Dans la somme $\sum_{i=1}^n T_i$ le nombre des 1 donne X_1 et le nombre de -1 donne X_2 donc

$$X_1 - X_2 = \sum_{i=1}^n T_i$$

b) La suite (T_n) est une suite de variables aléatoires indépendantes est de même loi de plus $E(T_i) = 0$ et $V(T_i) = E(T_i^2) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ donc d'après le théorème central limite :

$$\frac{\frac{X_1 - X_2}{n} - 0}{\sqrt{\frac{1}{2n}}} \text{ converge en loi vers la loi normale centrée réduite.}$$

$$\text{or } \frac{\frac{X_1 - X_2}{n} - 0}{\sqrt{\frac{1}{2n}}} = \sqrt{\frac{2}{n}}(X_1 - X_2)$$

Pour n assez grand, la loi de Z_2 peut être approchée par la loi centrée réduite

5) a) `import random as rd`

```
def Tirage():
    s = []
    for k in range(100):
        x = rd.randint(0, 3)    # On prend un nombre au hasard dans 0, 1, 2, 3.
        if x == 0:
            s += [1]           # on ajoute 1 avec un probabilité égale 1/4
        elif x == 1:
            s += [2]           # on ajoute 2 avec un probabilité égale 1/4
        else:
            s += [3]           # on ajoute 3 avec un probabilité égale 1/2
    return s
```

```
b) def Difference(C):
    s = 0
    for t in C:                # on parcourt les 100 résultats du tirage
        if t == 1:
            s += 1              # Si on voit un 1 on ajoute 1
        elif t == 2:
            s -= 1              # si on voit un 2 on soustrait 1
    return s
                                # On renvoie la valeur de X_1 - X_2
```

D. $s = 4$.

$$1) Y_i = \frac{X_i - np_i}{\sqrt{np_i}} \text{ donc } \text{cov}(Y_i; Y_j) = \frac{1}{n\sqrt{p_i p_j}} \text{cov}(X_i; X_j)$$

or on a vu dans la partie A :

$$\text{cov}(X_i; X_i) = V(X_i) = np_i(1 - p_i) \quad \text{et} \quad \text{si } i \neq j, \quad \text{cov}(X_i; X_j) = -np_i p_j$$

et les p_i sont égaux à $\frac{1}{4}$ donc pour $i \in \llbracket 1; 4 \rrbracket$,

$$\text{cov}(Y_i; Y_i) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \text{pour } (i, j) \in \llbracket 1; 4 \rrbracket^2 \text{ tel que } i \neq j \quad \text{cov}(Y_i; Y_j) = -\frac{1}{4}$$

on obtient ainsi la matrice M :

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$

On remarque alors que :

$$M = I_4 - N$$

2) a) On remarque que e_1, e_2, e_3, e_4 sont non nuls et $Ne_1 = Ne_2 = Ne_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $Ne_4 = e_4$

donc

$$e_1, e_2, e_3, e_4 \text{ sont des vecteurs propres de } N$$

de plus on remarque que (e_1, e_2, e_3, e_4) est une famille orthonormale de 4 vecteurs de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ (qui est de dimension 4) donc

$$(e_1, e_2, e_3, e_4) \text{ est une base de } \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$$

- b) Q la matrice de passage de la base canonique de $\mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$ vers une base orthonormale donc Q est inversible et $Q^{-1} = Q^T$ donc

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{-3}{2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

- c) (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de vecteurs propres de N associés respectivement aux valeurs propres $0, 0, 0, 1$ donc

$$Q^{-1}NQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

comme $Q^{-1}(I - N)Q = I - Q^{-1}NQ$ on en déduit que

$$Q^{-1}(I - N)Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et sachant que $Q^{-1} = Q^T$ et $M = I - N$, on peut conclure :

$$Q^T M Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3) \quad a) \quad \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_2) \\ Z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(Y_1 + Y_2 - 2Y_3) \\ Z_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(Y_1 + Y_2 + Y_3 - 3Y_4) \\ Z_4 = \frac{1}{2}(Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 &= \frac{X_1 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} + \frac{X_2 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} + \frac{X_3 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} + \frac{X_4 - \frac{n}{4}}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \\
&= \frac{X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - n}{\sqrt{\frac{n}{4}}} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{Z_4 = 0}$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} Z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(Y_1 - Y_2) \\ Z_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(Y_1 + Y_2 - 2Y_3) \\ Z_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(Y_1 + Y_2 + Y_3 - 3Y_4) \end{array} \right. \quad \text{donc (linéarité)} \quad \left\{ \begin{array}{l} E(Z_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(E(Y_1) - E(Y_2)) \\ E(Z_2) = \frac{1}{\sqrt{6}}(E(Y_1) + E(Y_2) - 2E(Y_3)) \\ E(Z_3) = \frac{1}{2\sqrt{3}}(E(Y_1) + E(Y_2) + E(Y_3) - 3E(Y_4)) \end{array} \right.$$

or les Y_i ont toutes la même espérance donc

$$\boxed{\text{pour } i = 1, 2, 3, \quad E(Z_i) = 0}$$

c)

$$\begin{aligned}
U_n &= (Y_1 \ Y_2 \ Y_3 \ Y_4) \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \end{pmatrix} \\
&= \left(Q \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \right)^T Q \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \\
&= (Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4) Q^T Q \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \\
&= (Z_1 \ Z_2 \ Z_3 \ Z_4) \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \quad \text{car } Q^T Q = I_4 \\
&= Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 + Z_4^2
\end{aligned}$$

or $Z_4 = 0$ donc

$$\boxed{U_n = Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2.}$$

Remarque : pour faire le lien entre les parties 1 et 2 voir le problème du concours blanc 2025.

Partie 2

1) a) (croissance comparées)

$$\begin{aligned}
x^{\frac{r}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}} &= \exp\left(-\frac{x}{2} + \ln(x) \left(\frac{r}{2} + 1\right)\right) \\
&= \exp\left(-\frac{x}{2} \left(1 - 2 \frac{\ln(x)}{x} \left(\frac{r}{2} + 1\right)\right)\right) \\
&\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0
\end{aligned}$$

$$\boxed{x^{\frac{r}{2}+1} e^{-\frac{x}{2}} \text{ tend vers } 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty}$$

b) La limite précédente permet d'affirmer (*définition d'une limite*)

$$\text{qu'il existe un réel } A > 0 \text{ tel que } \forall x > A, \quad x^{\frac{r}{2}+1}e^{-\frac{x}{2}} \leq 1$$

il vient bien :

il existe un réel $A > 0$ tel que : $\forall x > A, \quad x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{x^2}$

c) La fonction $x \mapsto x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}}$ est continue sur $[0; +\infty[$,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} dx$ est impropre en $+\infty$ il suffit d'étudier pour $A > 0$ la convergence de

$$\int_A^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} dx$$

en prenant un A défini à la question b) on a $\forall x > A, \quad 0 \leq x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} \leq \frac{1}{x^2}$

$$\text{or } \int_A^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx \text{ converge } \quad (\text{En effet } \int \frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0)$$

donc en appliquant le théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs ou nuls,

l'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}} dx$ converge

2) a) La fonction $x \mapsto x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}}$ est continue sur $[t; +\infty[$,

l'intégrale $\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} dx$ est impropre en $+\infty$ il suffit d'étudier la convergence de

$$\int_1^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$\text{or } \forall x > 1, \quad 0 \leq x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} \leq e^{-\frac{x}{2}} \text{ et } \int_1^{+\infty} e^{-\frac{x}{2}} dx \text{ converge } \quad (\text{En effet } \int e^{-\frac{x}{2}} = -2e^{-\frac{x}{2}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0)$$

donc en appliquant le théorème de convergence par comparaison des intégrandes positifs ou nuls,

l'intégrale $\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} dx$ converge

b)

$$\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} dx = \int_t^{+\infty} 2e^{-\frac{(\sqrt{x})^2}{2}} \frac{1}{2\sqrt{x}} dx$$

La fonction $\varphi : x \mapsto \sqrt{x}$ est C^1 et strictement croissante sur $[t; +\infty[$

donc (changement de variable ($u = \sqrt{x}$)) :

$$\int_t^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} dx \text{ et } \int_{\sqrt{t}}^{+\infty} 2e^{-\frac{u^2}{2}} du \text{ sont de même nature et égales en cas de convergence.}$$

Ces deux intégrales convergent et on sait que $\Phi(\sqrt{t}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{t}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$

On en déduit :

$G(t) = 2\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(\sqrt{t}))$

c) Φ est continue en 0 et $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ donc $\lim_{t \rightarrow 0} G(t) = \sqrt{2\pi}$

$\int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{x}{2}} dx \text{ converge et } J_1 = \sqrt{2\pi}$

3) a) ❶ f_r est continue sauf éventuellement en 0.

❷ f_r est à valeurs positives ou nulles.

❸ $\int_{-\infty}^{+\infty} f_r(x) dx = 1$ En effet dans 1) et 2) on a montré la convergence et défini $J_r = \int_0^{+\infty} x^{\frac{r}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$

f_r est une densité de probabilité.

b) Pour $r = 2$ on remarque que $J_2 = 2$ et ainsi $f_2 : x \mapsto \frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)$

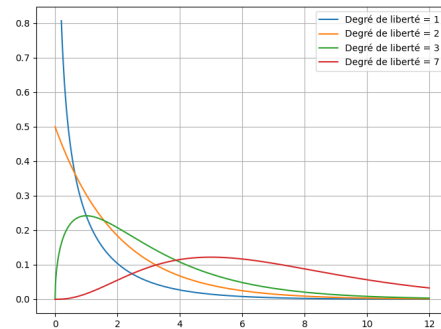
Pour $r = 2$ on reconnaît la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$

c) La limite en 0 de f_1 est infini C_{f_1} est en bleu.

La limite en 0 de f_2 est $\frac{1}{2}$, C_{f_2} est en orange.

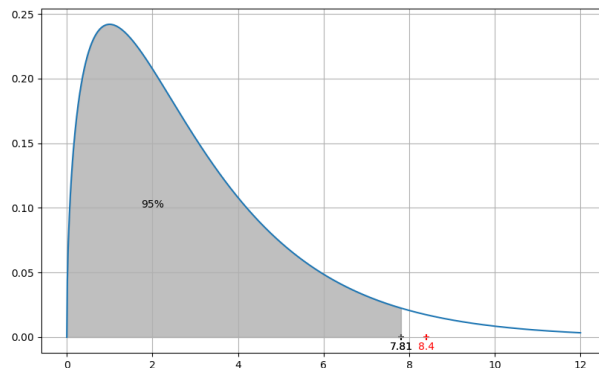
f_3 n'est pas dérivable en 0 est infini C_{f_3} est en vert.

La dernière C_{f_7} est en rouge.



Partie 3

En supposant que la répartition est uniforme seulement 5% des échantillons donnent des valeurs du Khi-2 supérieures à 7,81. Or ici on observe un Khi-2 égale à 8,4, c'est peu probable.



On rejette l'hypothèse d'une répartition uniforme

FIN DE LA CORRECTION

EXERCICES.

Ex 1 : On étudie la transmission d'un caractère chez une plante. Un croisement hétérozygote $\times$ hétérozygote donne théoriquement les proportions suivantes : $AA : \frac{1}{4}$, $Aa : \frac{1}{2}$, $aa : \frac{1}{4}$.

On observe sur un échantillon de 320 individus :

Génotype	AA	Aa	aa
Effectif observé	70	190	60

1) Déterminer les effectifs théoriques.

2) Calculer la statistique du χ^2 .

3) Au seuil de 5%, peut-on considérer que le modèle mendélien est compatible avec les observations ?

4) Proposer des interprétations biologiques en cas de rejet.

Ex 2 : On étudie la répartition d'une espèce végétale sur une parcelle divisée en quatre zones de même surface.

On observe les effectifs suivants :

Zone	1	2	3	4
Effectif observé	120	80	110	90

- 1) Formuler l'hypothèse H_0 correspondant à une répartition uniforme.
- 2) Déterminer les effectifs théoriques et calculer la statistique du χ^2 .
- 3) Conclure au seuil de 5%.
- 4) Proposer des facteurs écologiques pouvant expliquer les écarts observés.

Ex 3 : On mesure la production d'un composé lors d'une réaction enzymatique, classée en quatre niveaux. Le modèle théorique prévoit les proportions suivantes : 10%, 20%, 40%, 30%.

Sur un échantillon de 500 mesures, on observe :

Classe	1	2	3	4
Effectif observé	40	120	210	130

- 1) Déterminer les effectifs théoriques et calculer la statistique du χ^2 .
- 2) Conclure au seuil de 5%.
- 3) Proposer des explications biologiques en cas de rejet.

Ex 4 : Le but de cet exercice est de répondre à la question suivante :

"On lance 1000 fois un dé et on obtient les résultats suivants :

faces	1	2	3	4	5	6
effectifs	160	180	163	150	166	181

Pensez-vous que ce dé est équilibré?"

On étudie l'expérience : On lance $N = 1\,000$ fois ce dé.

on note pour chaque $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$, X_i le nombre de face i obtenues et $C = \sum_{i=1}^6 \frac{(X_i - N/6)^2}{N/6}$

- 1) On note $Z = \sum_{k=1}^5 Y_k$ où $Y_1, \dots, Y_5$ sont 5 gaussiennes centrées réduites indépendantes.

Tracer la fonction de répartition de Z à l'aide d'une longue série de simulations.

Comparer (*graphiquement*) votre courbe avec celle de la fonction F suivante :

```
from scipy.stats import chi2
F = chi2(df = 5).cdf
```

- 2) Tracer dans le même repère la fonction de répartition de C à l'aide d'une longue série de simulations.

On approche, alors la fonction de répartition de C par F

(Fonction de répartition de la loi du Khi^2 avec 5 degrés de liberté)

- 3) Quelle valeur c_{obs} prend C avec les résultats donnés en introduction?
- 4) Quelle est la probabilité de $C \geq c_{\text{obs}}$?
- 5) Reprendre la question avec les résultats suivants :

faces	1	2	3	4	5	6
effectifs	195	145	158	179	149	174

Ex 5 : Pour chacun des exercices précédents, expliquer pourquoi : "Ne pas rejeter H_0 ne signifie pas que H_0 est vraie." Préciser également les conditions d'application du test du χ^2 .

Table de la fonction de répartition de la loi du khi 2.

x	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$	$F_5(x)$
0.5	0.520	0.221	0.084	0.026	0.007
1	0.683	0.393	0.199	0.091	0.037
2	0.843	0.632	0.427	0.264	0.173
3	0.916	0.777	0.608	0.442	0.325
4	0.955	0.865	0.739	0.594	0.456
5	0.975	0.918	0.828	0.713	0.584
6	0.987	0.950	0.893	0.808	0.692
7	0.993	0.969	0.939	0.878	0.781
7.81	0.995	0.980	0.950	0.920	0.846
8	0.996	0.982	0.954	0.932	0.865
9	0.998	0.989	0.971	0.962	0.916
10	0.999	0.993	0.982	0.978	0.947